Seconda prova di accertamento di Algebra 1 del 24 gennaio 2018

Esercizio 1. (a) Si enunci il Teorema fondamentale di omomorfismo per i semigruppi.

(b) Si dimostri il Teorema fondamentale di omomorfismo per i semigruppi.

Esercizio 2. (a) Si completi la seguente definizione: "Siano $1 \leq d \leq n$ numeri naturali e sia S_n il gruppo simmetrico su n oggetti. Un *ciclo di lunghezza* d in S_n è…"

(b) Siano f e g due cicli di lunghezza 2, ossia due trasposizioni. Si dimostri che f e g commutano (ossia $f \circ g = g \circ f$) se e solo se $f = g$ oppure f e g sono cicli disgiunti.

Esercizio 3. Siano G un gruppo e H un sottogruppo di G. Il *normalizzatore* di H in G è l'insieme $N_G(H) = \{\, g \in G \mid gH = Hg \,\}$.

(a) Si dimostri che $N_G(H)$ è un sottogruppo di G.

(b) Si dimostri che $N_G(H)$ contiene H.

(c) Si dimostri che H è sottogruppo normale di $N_G(H)$.

(d) Si dimostri che se L è un sottogruppo di G, L contiene H e H è sottogruppo normale di L, allora $L \subseteq N_G(H)$.

Esercizio 4. Sia R un anello commutativo con identità.

(a) Si dimostri se $\{\, I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\}$ è una famiglia di ideali di R, allora l'intersezione $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ è un ideale di R

(b) Sia X un sottoinsieme di R. Si dimostri che l'intersezione di tutti gli ideali di R che contengono X è il più piccolo ideale di R che contiene X.

(c) Sia X un sottoinsieme non vuoto di R. Si dimostri che l'intersezione di tutti gli ideali di R che contengono X è l'insieme

$$\{\, r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \mid n \geq 1,\ r_1, \ldots, r_n \in R,\ x_1, \ldots, x_n \in X \,\}.$$