**Esame di Algebra 1 del 2 febbraio 2018**

**Esercizio 1.** Siano $A, B$ insiemi ed $f\colon A \to B$ un'applicazione.
(a) Si dimostri che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
(i) $f$ è iniettiva.
(ii) Per ogni sottoinsieme $X$ di $A$ si ha $f^{-1}(f(X)) = X$.
(b) Si dimostri che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
(i) $f$ è suriettiva.
(ii) Per ogni sottoinsieme $Y$ di $B$ si ha $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

**Esercizio 2.** Sia $G$ un grafo (o un multigrafo, a scelta del candidato). Si completino le seguenti due definizioni:
(a) Un *cammino euleriano* in $G$ è…
(b) Un *circuito euleriano* in $G$ è…

Sia ora $n \geq 3$ un numero intero fissato e sia $G_n$ il grafo con $n$ vertici $v_1, v_2, \dots v_n$ in cui sono adiacenti i vertici $v_i$ e $v_{i+1}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$ e sono adiacenti i vertici $v_1$ e $v_i$ per ogni $i = 2, 3, \dots, n$ (quindi $G_n$ è una "corona su $n$ vertici" in cui c'è un vertice fissato $v_1$ che è adiacente a tutti gli altri vertici del grafo).
(c) Quanti lati ha il grafo $G_n$?
(d) Il grafo $G_n$ ha un cammino euleriano se e solo se $n =$?
(e) Il grafo $G_n$ ha un circuito euleriano se e solo se $n =$?

**Esercizio 3.** Siano $G, H$ gruppi ed $f\colon G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Si provi che:
(a) Se $N$ è sottogruppo normale di $H$, allora $f^{-1}(N)$ è un sottogruppo normale di $G$.
(b) Se $M$ è sottogruppo normale di $G$, allora non è necessariamente vero che $f(M)$ sia un sottogruppo normale di $H$.

**Esercizio 4.** (a) Si completino le seguenti definizioni:

1. Un *dominio euclideo* è…
2. Sia $R$ un anello commutativo con identità. Un suo ideale $I$ si dice *principale* se…

(b) Si dimostri che ogni ideale di un dominio euclideo $R$ è principale.

**Esercizio 5.** (a) Siano $M, N$ monoidi moltiplicativi e sia $\varphi\colon M \to N$ un omomorfismo di monoidi. Si dimostri che se $x \in M$ è un elemento invertibile, allora $f(x) \in N$ è un elemento invertibile.
(b) Sia considerino il sottoanello $\mathbb{Z}[\,i\,] = \{\, a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ di $\mathbb{C}$ (detto *l'anello degli interi di Gauss*) e l'applicazione $\nu\colon \mathbb{Z}[\,i\,] \to \mathbb{N}$ definita da $\nu(a+ib) = a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. ( Il numero naturale $\nu(a+ib)$ è detto la *norma* di $a+ib$.) Si provi che $\nu$ è un omomorfismo del monoide $(\mathbb{Z}[\,i\,], \cdot)$ nel monoide $(\mathbb{N}, \cdot)$.
(c) Si determinino gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauss. Quanti sono?