**Esame di Algebra 1 del 15 febbraio 2018**

**Esercizio 1.** Siano $A$ un insieme e $\mathcal{R} = \{\, \rho \mid \rho$ è una relazione riflessiva e transitiva su $A \,\}$ l'insieme delle relazioni riflessive e transitive su $A$. Per ogni $\rho \in \mathcal{R}$ sia $\sim_\rho$ la relazione su $A$ definita, per ogni $a, b \in A$, da $a \sim_\rho b$ se $a\rho b$ e $b\rho a$.
(a) Si dimostri che $\sim_\rho$ è una relazione di equivalenza su $A$ per ogni $\rho \in \mathcal{R}$.
(b) Sia $A/\sim_\rho$ l'insieme quoziente. Si definisca una relazione $\leq$ su $A/\sim_\rho$, ponendo, per ogni $a, b \in A$, $[a]_{\sim_\rho} \leq [b]_{\sim_\rho}$ se $a\rho b$. Si dimostri che la relazione $\leq$ su $A/\sim_\rho$ è ben definita, ossia che per ogni $a, b, a', b' \in A$ tale che $[a]_{\sim_\rho} = [a']_{\sim_\rho}$ e $[b]_{\sim_\rho} = [b']_{\sim_\rho}$, si ha $a\rho b$ se e solo se $a'\rho b'$.
(c) Si dimostri che $\leq$ è un ordinamento parziale su $A/\sim_\rho$.
(d) Sia $\rho \in \mathcal{R}$. Si dimostri che $\rho$ è un ordinamento parziale su $A$ se e solo se $\sim_\rho$ è la relazione di uguaglianza $=$ su $A$.

**Esercizio 2.** Un monoide commutativo additivo $M$ si dice *ridotto* se $a, b \in M$ e $a + b = 0$ implica $a = b = 0$.

Sia $G$ un gruppo abeliano additivo.
(a) Sia $\leq$ un ordinamento parziale su $G$ tale che, per ogni $a, b, c \in G$, $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$. Si dimostri che $G^+ = \{\, a \in G \mid 0 \leq a \,\}$ è un sottomonoide ridotto di $G$.
(b) Viceversa sia $M$ sottomonoide ridotto di $G$. Si definisca una relazione $\leq$ in $G$ ponendo, per ogni $a, b \in G$, $a \leq b$ se esiste $m \in M$ tale che $a + m = b$. Si dimostri che $\leq$ è un ordinamento parziale su $G$ tale che, per ogni $a, b, c \in G$, $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$, e che $G^+ = M$.

**Esercizio 3.** (a) Sia $G$ l'insieme di tutte le matrici $2 \times 2$ ad elementi reali del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac \neq 0$. Si dimostri che $G$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.
(b) L'insieme $H$ di tutte le matrici $2 \times 2$ ad elementi reali del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, è un sottogruppo di $G$? È un sottogruppo normale di $G$?
(c) Sia $L$ l'insieme di tutte le matrici $2 \times 2$ ad elementi reali del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac = 1$. Si dimostri che $L$ è un sottogruppo normale di $G$ e che $G/L \cong \mathbb{R}^*$, il gruppo moltiplicativo dei numeri reali $\neq 0$.
(d) Sia $M$ l'insieme di tutte le matrici $2 \times 2$ ad elementi reali del tipo $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $b \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $M$ è un sottogruppo normale di $G$ isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e che $G/M$ è isomorfo al prodotto diretto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, dove $\mathbb{R}^*$è il gruppo moltiplicativo dei numeri reali $\neq 0$.

**Esercizio 4.** (a) Si enunci il teorema di Ruffini.
(b) Si dimostri il teorema di Ruffini.
(c) Siano $F$ un campo e $a \in F$. Sia $\varphi\colon F[x] \to F$ l'omomorfismo di anelli definito da $\varphi(f) = f(a)$ per ogni $f \in F[x]$. Si dimostri che $\ker(\varphi)$ è un ideale principale di $F[x]$, determinandone un generatore. Si dimostri che $F[x]/\ker(\varphi)$ è un campo.