Esame di Algebra 1 del 20 giugno 2018

Esercizio 1. Sull'insieme $\mathbb{N}$ si considerino i due ordinamenti parziali $\leq$ (l'ordinamento usuale su $\mathbb{N}$) e $|$ (la relazione "divide"). Sul prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri l'ordinamento parziale $\preceq$ definito ponendo, per ogni $(a,b),(a',b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b) \preceq (a',b')$ se $a \leq a'$ e $b|b'$.
(a) Si determini, se esiste, il minimo di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(b) Si determinino, se esistono, gli elementi massimali di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(c) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore di $\mathbb{N} \times \{0\}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Si consideri il gruppo $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \{\, (\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0 \,\}$ dotato dell'operazione definita, per ogni $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in G$, da

$$(\alpha,\beta)(\alpha',\beta') = (\alpha + \beta\alpha', \beta\beta').$$

(a) Si determini l'inverso in G dell'elemento $(\alpha,\beta) \in G$.
(b) Sia $H = \mathbb{R} \times \{1\} = \{\, (\alpha,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$. È vero che $gh = hg$ per ogni $g \in G$, $h \in H$?
(c) È vero che H è sottogruppo normale di G?

Esercizio 3. Siano G un gruppo ed $e\colon G \to G$ un omomorfismo di gruppi idempotente, cioè tale che $e \circ e = e$. Siano $\ker e$ e $\operatorname{im} e$ il nucleo e l'immagine di e. Si dimostri:
(a) che $\ker e \cap \operatorname{im} e = \{1_G\}$;
(b) che ogni elemento di G si scrive nella forma ki con $k \in \ker e$ e $i \in \operatorname{im} e$;
(c) che tale forma di scrivere un elemento di G è unica, ossia che se $ki = k'i'$ con $k,k' \in \ker e$ e $i,i' \in \operatorname{im} e$, allora $k = k'$ e $i = i'$.

Esercizio 4. Siano R un anello commutativo con identità e $a \in R$.
(a) Si completino le seguenti definizioni:
(i) a si dice *invertibile* se...
(ii) a si dice *divisore dello zero* se...
(b) Si supponga anche che l'anello R sia finito. Si dimostri che a è invertibile se e solo se $a \neq 0$ e a non è divisore dello zero.

Esercizio 5. Siano $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali e $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata x. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi(f(x)) = (f(0), f(1))$ per ogni $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, dove $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ denota il prodotto diretto di $\mathbb{R}$ per sé stesso, ossia il prodotto cartesiano con le operazioni per componenti.
(a) Si dimostri che φ è omomorfismo suriettivo di anelli.
(b) L'ideale $\ker\varphi$ è massimale? È primo?

Ogni risposta deve essere giustificata.