**Esame di Algebra 1 del 25 gennaio 2019**

**Esercizio 1.** Siano $n \geq 1$ e $k$ numeri interi fissati. Si definisca una relazione $\sim_{k,n}$ su $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim_{k,n} y$ se: (1) $x = y$; oppure (2) $x \geq k$, $y \geq k$ e $x \equiv y \pmod{n}$ (ossia se esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $x - y = nz$).
(a) Si dimostri che $\sim_{k,n}$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbb{Z}$.
(b) Sia $f\colon \mathbb{Z}/\!\sim_{k,n} \to \mathbb{Z}/\!\sim_{k,n}$ l'applicazione definita, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, da $f([x]_{\sim_{k,n}}) = [x+1]_{\sim_{k,n}}$. Si dimostri che $f$ è ben definita, ossia che se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $[x]_{\sim_{k,n}} = [y]_{\sim_{k,n}}$, allora $[x+1]_{\sim_{k,n}} = [y+1]_{\sim_{k,n}}$.
(c) Si provi che $f$ è suriettiva.
(d) Si provi che $f$ non è iniettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri la permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scomponga $f$ come prodotto di cicli disgiunti.
(b) La permutazione $f$ è di classe pari?
(c) Si scomponga $f$ come prodotto di trasposizioni.
(d) Si calcoli la segnatura di $f$.
(e) Si risponda alle stesse domande (a), (b), (c), (d) per la permutazione $f^2 = f \circ f$.

**Esercizio 3.** Siano $M$ un monoide e $U(M)$ il sottomonoide di $M$ costituito da tutti gli elementi invertibili di $M$. Per ogni $x \in M$ si ponga $xU(M) = \{\, xy \mid y \in U(M) \,\}$. L'insieme $\{\, xU(M) \mid x \in M \,\}$ è una partizione di $M$?

**Esercizio 4.** Siano $G$ l'insieme di tutte le matrici $2 \times 2$ del tipo $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$, $A$ l'insieme di quelle del tipo $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e $B$ quello delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$.
(a) L'insieme $G$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne?
(b) Il suo sottoinsieme $A$ è un sottogruppo di $G$? È normale?
(c) Il sottoinsieme $B$ è un sottogruppo di $G$? È normale?

**Esercizio 5.** (a) Sia $R$ anello commutativo con identità e $a \in R$. Si dica cosa si intende per *ideale principale generato da $a$*.
(b) Si dica cosa si intende per *dominio euclideo*.
(c) Si dimostri che, in un dominio euclideo, ogni ideale è principale.
(d) Sia $R$ il sottoanello $\mathbb{Z}[i] = \{\, a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Si determini ideale principale di $R$ generato da $-i$.

Ogni risposta deve essere giustificata.