Esame di Algebra 1 dell'8 febbraio 2019

Esercizio 1. Si dimostri che l'insieme dei numeri primi è infinito.

Esercizio 2. Casa mia ha cinque finestre. Ho deciso di dipingerne due di bianco, due di rosso e una di verde. Deciso questo, in quanti modi posso dipingere le finestre di casa mia?

Esercizio 3. Siano M un monoide e S un suo sottomonoide. Per ogni $x \in M$ si ponga $xS = \{ xs \mid s \in S \}$. L'insieme $\{ xS \mid x \in M \}$ è una partizione di M? (Al solito: se la risposta è sì, dimostrarlo; se la risposta è no, dare un contro esempio.)

Esercizio 4. Un gruppo G si dice *ciclico* se esiste $g \in G$ tale che, per ogni sottogruppo H di G, $g \in H$ implica $G = H$.
(a) Si dimostri che un gruppo G è ciclico se e solo se esiste $g \in G$ tale che $G = \{ g^z \mid z \in \mathbb{Z} \}$.
(b) Sia G un gruppo di ordine p, con p primo. Si dimostri che G è ciclico.
(c) Sia G un gruppo di ordine p, con p primo. Si dimostri che G ha esattamente due sottogruppi.

Esercizio 5. (a) Si enunci il teorema di Ruffini.
(b) Si dimostri il teorema di Ruffini.
(c) Sia $\mathbb{Z}_7$ il campo di 7 elementi. Si divida il polinomio $\overline{2}x^4 - x^3 - \overline{2}x^2 + \overline{4}x - \overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$ per $x + \overline{5}$ nell'anello $\mathbb{Z}_7[x]$.
(d) $\overline{2}$ è una radice del polinomio $\overline{2}x^4 - x^3 - \overline{2}x^2 + \overline{4}x - \overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$?

Ogni risposta deve essere giustificata.