Esame di Algebra 1 del 18 settembre 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \equiv 0 \pmod 3 \\ n^3 & \text{se } n \equiv 1 \pmod 3 \\ n^2 & \text{se } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

(a) L'applicazione f è iniettiva?
(b) L'applicazione f è suriettiva?

Esercizio 2. Si consideri la permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scomponga f come prodotto di cicli disgiunti.
(b) La permutazione f è di classe pari?
(c) Si scomponga f come prodotto di trasposizioni.
(d) Si calcoli la segnatura di f.

Esercizio 3. Sia $n \geq 2$ un numero intero fissato e G il gruppo di tutte le matrici $n \times n$ ad element reali con determinante diverso da 0 (la moltiplicazione in G è il prodotto righe per colonne). Sia H il sottoinsieme di G i cui elementi sono tutte le matrici $n \times n$ ad element reali con determinante 1.
(a) Si dimostri che H è sottogruppo normale di G.
(b) Si dimostri che G/H è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali non nulli.
(c) Il gruppo $\mathbb{R}^*$ ha sottogruppi di indice 2? In caso affermativo se ne dia un esempio.
(d) Il gruppo G ha sottogruppi di indice 2? In caso affermativo se ne dia un esempio.

Esercizio 4. Sia R un anello con identità 1_R.
(a) Si dica cosa si intende per *caratteristica* di R.
(b) Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici 2×2 ad elementi reali ed

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Z},\ b, c \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Si dimostri che R è sottoanello non commutativo di $M_2(\mathbb{R})$.
(c) Sia $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$. Si dimostri che I è un ideale di R.
(d) Si calcoli la caratteristica dell'anello R.

Esercizio 5. Sia R un dominio d'integrità.
(a) Si definisca cosa vuol dire che un elemento r di R è *irriducibile*.
(b) Siano $R = \mathbb{Z}[i] = \{\, a + ib \mid a, b \in\in \mathbb{Z} \,\} \subseteq \mathbb{C}$ e $r = 1 + i$. Si dimostri che r è un elemento irriducibile di $\mathbb{Z}[i]$.

Ogni risposta deve essere giustificata.