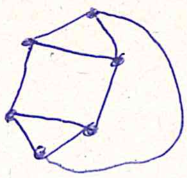
Esame di Algebra 1 del 5 luglio 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \equiv 0 \pmod 3 \\ n^2 & \text{se } n \equiv 1 \pmod 3 \\ n^3 & \text{se } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

(a) L'applicazione f è iniettiva?
(b) L'applicazione f è suriettiva?

Esercizio 2. Si consideri il grafo G rappresentato in figura.



(a) Il grafo G è regolare?
(b) Il grafo G ha un cammino euleriano?
(c) Il grafo G ha un circuito euleriano?

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Q}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri razionali non nulli, $\varphi\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ l'applicazione definita da $\varphi(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Q}^*$, e $\mathbb{Q}_{>0}$ l'insieme dei numeri razionali positivi.
(a) Si dimostri che φ è un endomorfismo del gruppo $\mathbb{Q}^*$.
(b) Si determinino il nucleo $\ker\varphi$ e l'immagine $\operatorname{im}\varphi$ di φ. È vero che $\operatorname{im}\varphi = \mathbb{Q}_{>0}$?
(c) Si dimostri che $\ker\varphi \cap \mathbb{Q}_{>0} = \{1\}$.
(d) Si dimostri che ogni elemento di $\mathbb{Q}^*$ si scrive nella forma ki con $k \in \ker\varphi$ e $i \in \mathbb{Q}_{>0}$.
(e) Si dimostri che tale forma di scrivere un elemento di $\mathbb{Q}^*$ è unica, ossia che se $ki = k'i'$ con $k, k' \in \ker\varphi$ e $i, i' \in \mathbb{Q}_{>0}$, allora $k = k'$ e $i = i'$.

Esercizio 4. Siano R, S anelli ed $f\colon R \to S$ un omomorfismo di anelli. Si dimostri che:
(a) Se I è ideale di R, allora $f^{-1}(f(I)) = I + \ker f$.
(b) Se J è ideale di S, allora $f^{-1}(J)$ è ideale di R.

Esercizio 5. (a) Si determinino gli zeri del polinomio $x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ nel campo di due elementi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(b) Si determini il MCD dei due polinomi $x^3 + x^2 + x$ e $x^4 + x^3 + x + \overline{1}$ nell'anello $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.

Ogni risposta deve essere giustificata.