**Esame di Algebra 1 del 10 febbraio 2020**

**Esercizio 1.** Si consideri la permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 2 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si decomponga $f$ come prodotto di cicli disgiunti, come prodotto di trasposizioni, e si dica se $f$ è di classe pari. Qual è la segnatura di $f$?

**Esercizio 2.** Un'applicazione $f\colon X \to X$ si dice *idempotente* se $f \circ f = f$.
(a) Si dimostri che se $X, Y$ sono insiemi e $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ sono applicazioni tali che $f \circ g = \iota_Y$, allora l'applicazione $g \circ f\colon X \to X$ è idempotente.

Sia $G$ un gruppo abeliano additivo. Sia $I = \{f\colon G \to G \mid f$ è un endomorfismo idempotente di $G\}$. Sia $C$ l'insieme di tutte le coppie $(A, B)$, dove $A$ e $B$ sono sottogruppi di $G$ tali che $A + B = G$ e $A \cap B = \{0_G\}$.
(b) Si dimostri che $(\ker f, f(G)) \in C$ per ogni $f \in I$.
(c) Si dimostri che l'applicazione $F\colon I \to C$ definita da $F(f) = (\ker f, f(G))$ per ogni $f \in I$ è una biiezione.

**Esercizio 3.** Siano $(G, \cdot)$ un gruppo, $H$ un sottogruppo di $G$ e $C = \{\, gH \mid g \in G \,\}$ l'insieme delle classi laterali sinistre di $G$ modulo $H$. Sia $\varphi\colon G \to C$ l'applicazione definita da $\varphi(g) = gH$ per ogni $g \in G$, di modo che $\varphi$ è suriettiva. Sia $\psi\colon C \to G$ un'inversa a destra di $\varphi$, di modo che $\varphi \circ \psi = \iota_C$.
(a) Si dimostri che $g^{-1} \cdot ((\psi \circ \varphi)(g)) \in H$ per ogni $g \in G$.
(b) Si dimostri che l'applicazione $\psi$ è iniettiva.
(c) Si dimostri che l'applicazione $\omega\colon \psi(C) \times H \to G$ definita da $\omega(t, h) = t \cdot h$ per ogni $(t, h) \in \psi(C) \times H$ è una biiezione.

**Esercizio 4.** Sia $R$ un anello con identità. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se $x^n = 0_R$ per qualche intero positivo $n$.
(a) Si dimostri che se $x \in R$ è nilpotente, allora $x$ non è invertibile in $R$.
(b) Si dimostri che se $x \in R$ è nilpotente, allora $1_R - x$ è invertibile in $R$. Qual è l'inverso di $1_R - x$?
(c) Si dimostri che se $R$ è commutativo, allora l'insieme $N$ di tutti di elementi nilpotenti di $R$ è un ideale di $R$.
(d) Si dimostri che se $R$ è commutativo, allora $0_{R/N}$ è l'unico elemento nilpotente dell'anello quoziente $R/N$.

**Esercizio 5.** Sia $R$ un dominio di integrità. Si definisca cosa si intende per *elemento irriducibile* di $R$.

**Esercizio 6.** (a) Si enunci il Teorema di Ruffini.
(b) Si dimostri il Teorema di Ruffini.

Ogni risposta deve essere giustificata.