Esame di Algebra 1 del 26 giugno 2019

Esercizio 1. Sia X un insieme. Un'applicazione $f\colon X \to X$ si dice *idempotente* se $f \circ f = f$. Si dimostri che per un insieme X e un'applicazione $f\colon X \to X$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) f è idempotente.
(b) Esiste un sottoinsieme A di X tale che $f(A) \subseteq X \setminus A$ e $f(x) = x$ per ogni $x \in X \setminus A$.

Esercizio 2. (a) Si completi la seguente definizione. Siano a, b due numeri interi. Un numero intero d si dice un *massimo comun divisore* (MCD) di a e b se ....
(b) Si dimostri il seguente teorema. Siano a, b due numeri interi non entrambi nulli. Allora esiste un MCD positivo d di a e b. Inoltre esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $d = \alpha a + \beta b$ *(Identità di Bézout).*

Esercizio 3. Sia $(\mathbb{N}, |)$ il reticolo dei numeri naturali con la relazione $|$ (divide). Si consideri il sottoinsieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ di $\mathbb{N}$.
(a) L'insieme A, con l'ordine indotto da $(\mathbb{N}, |)$, è un reticolo?.
(b) Esiste l'estremo superiore di 2 e 3 in A? Qual è?

Esercizio 4. Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo.
(a) Cosa si intende per *indice* di H in G? In genere lo si denota con $[G : H]$.
(b) Cosa si intende dicendo che H è un sottogruppo *normale* di G?
(c) Si dimostri che se $[G : H] = 2$ e $g \in G$, allora:
(i) se $g \in H$, allora $gH = H$;
(ii) se $g \in G \setminus H$, allora $gH = G \setminus H$.
(d) Si dimostri che ogni sottogruppo di G di indice 2 è normale in G.

Esercizio 5. (a) Sia R un dominio di integrità. Cosa vuol dire che un elemento di R è *irriducibile*?
(b) Si dimostri che se F è un campo, $F[x]$ è l'anello dei polinomi, e $f \in F[x]$ è un polinomio di grado 3, allora f è un elemento irriducibile del dominio di integrità $F[x]$ se e solo se f non ha radici in F.
(c) Si considerino il campo con 7 elementi $\mathbb{Z}_7$ e l'anello $\mathbb{Z}_7[x]$ dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$. L'elemento $f = x^3 + x^2 + x + \overline{2}$ di $\mathbb{Z}_7[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_7[x]$?
(d) L'ideale principale (f) di di $\mathbb{Z}_7[x]$ generato da f è un ideale massimale di $\mathbb{Z}_7[x]$?

Ogni risposta deve essere giustificata.