Esame di Algebra 1 del 12 luglio 2019

Esercizio 1. (a) Si enunci il principio di induzione.
(b) Si dimostri per induzione che se n è un numero naturale positivo e $x_1, \dots, x_n$ sono numeri reali positivi, allora $(1 + x_1) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$.

Esercizio 2. Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione. Definiamo una relazione $\sim_f$ su A ponendo, per ogni $x, y \in A$, $x \sim_f y$ se $f(x) = f(y)$. Per ogni $x \in A$ sia $[x] = \{\, y \in A \mid y \sim_f x \,\}$ e sia $S = \{\, [x] \mid x \in A \,\}$.
(a) Si dimostri che $\sim_f$ è una relazione di equivalenza.
(b) La posizione $[x] \mapsto f(x)$ definisce un'applicazione $g\colon S \to B$?
(c) Si dimostri che se A e B sono gruppi moltiplicativi ed f è un omomorfismo di gruppi con $\ker(f) = K$, allora $[x] = xK$ per ogni $x \in A$.

Esercizio 3. Sia A un insieme con più di un elemento, $\pi_1\colon A \times A \to A$ la proiezione sul primo fattore, e si consideri π_1 come un'operazione $*$ su A.
(a) Dire se $(A, *)$ è un semigruppo.
(b) Dire se $(A, *)$ è un monoide.
(c) Si considerino le applicazioni $\lambda\colon A \to A^A$ e $\rho\colon A \to A^A$ definite, per ogni $a, b \in A$, da $\lambda(a)(b) = a * b$ e $\rho(a)(b) = b * a$ rispettivamente. Le applicazioni λ e ρ sono omomorfismi di semigruppi? Le applicazioni λ e ρ sono iniettive? L'applicazione ρ è un isomorfismo di semigruppi?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e si consideri l'operazione $*$ su $\mathbb{Q}^*$ definita, per ogni $q, q' \in \mathbb{Q}^*$, da $q * q' = -qq'$. Si dimostri che $(\mathbb{Q}^*, *)$ è un gruppo.

Esercizio 5. Siano R un anello commutativo con identità ed S un suo sottoinsieme. È vero che:
(a) se $1_R \in S$ ed S è un ideale di R, allora $S = R$?
(b) se $1_R \in S$ ed S è un sottoanello di R, allora $S = R$?
(c) se $f\colon R \to R$ è un omomorfismo di anelli e $S = \ker(f)$, allora S è un ideale di R?

Ogni risposta deve essere giustificata.