Esame di Algebra 1 del 18 settembre 2019

Esercizio 1. Siano A un insieme non vuoto ed $f\colon A \to A$ un'applicazione suriettiva ma non iniettiva.
(a) L'insieme A è un insieme infinito?
(b) Se $A = \mathbb{N}$, esiste un'applicazione $f\colon A \to A$ suriettiva ma non iniettiva?

Esercizio 2. Siano $n \geq 1$ un intero e A la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri per induzione che

$$A^k = \begin{pmatrix} n^{k-1} & n^{k-1} & \dots & n^{k-1} \\ n^{k-1} & n^{k-1} & \dots & n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^{k-1} & n^{k-1} & \dots & n^{k-1} \end{pmatrix}$$

per ogni intero $k \geq 1$.

Esercizio 3. Sia G il gruppo delle matrici triangolari superiori 2×2 ad elementi reali e con determinante non nullo. Siano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ed} \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

(a) Si dimostri che H è un sottogruppo normale di G isomorfo al gruppo $(\mathbb{R}, +)$.
(b) Si dimostri che L è un sottogruppo non normale di G isomorfo al gruppo $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \cdot)$.
(c) Si dimostri che ogni elemento $g \in G$ si scrive in modo unico nella forma $g = h\ell$ con $h \in H$ ed $\ell \in L$.

Esercizio 4. (a) Si diano le definizioni di dominio d'integrità e di campo.
(b) Si dimostri che ogni campo è un dominio di integrità.
(c) Si dia un esempio di un dominio di integrità che non è un campo.

Esercizio 5. Siano R un dominio di integrità ed $R[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti in R.
(a) Si completi la seguente definizione: "Un elemento $a \in R$ si dice *irriducibile* se…"
(b) Si dimostri che l'elemento $x \in R[x]$ è irriducibile.

Ogni risposta deve essere giustificata.