

AIX-MARSEILLE UNIVERSITE  
LSIS - Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes

Mémoire présenté en vue de l'obtention de  
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

# Analyse des équations de transport avec vitesses non-locales et applications à la commande des foules

Candidat : Francesco ROSSI



Date de la soutenance : 9 juin 2016

Jury :

AMBROSIO Luigi,	professeur,	rapporteur,
DEGOND Pierre,	professeur,	rapporteur,
PRIEUR Christophe,	professeur,	rapporteur,
CHITOUR Yacine,	professeur,	examineur,
HAMMOURI Hassan,	professeur,	examineur,
JEAN Frédéric,	professeur,	examineur,
MAURY Bertrand,	professeur,	examineur,
GAUTHIER Jean-Paul,	professeur,	tuteur.



AIX-MARSEILLE UNIVERSITE  
LSIS - Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes

Mémoire  
présenté en vue de l'obtention de  
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Analyse des équations de transport  
avec vitesses non-locales  
et applications à la commande des foules

Candidat : Francesco ROSSI

*Date de la soutenance : 9 juin 2016*

Jury :

AMBROSIO Luigi,	professeur,	rapporteur,
DEGOND Pierre,	professeur,	rapporteur,
PRIEUR Christophe,	professeur,	rapporteur,

CHITOUR Yacine,	professeur,	examineur,
HAMMOURI Hassan,	professeur,	examineur,
JEAN Frédéric,	professeur,	examineur,
MAURY Bertrand,	professeur,	examineur,

GAUTHIER Jean-Paul,	professeur,	tuteur.
---------------------	-------------	---------

*En première de couverture : Shibuya crossing, Tokyo.*  
*En quatrième de couverture : Amandier en fleurs, Vincent van Gogh.*

## Publications

Les recherches présentées dans ce mémoire ont été publiées dans les articles suivants, annexes au mémoire :

- [R1] B. PICCOLI, F. ROSSI, Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces : convergence of numerical schemes, *Acta Applicanda Mathematicae* 124, pp. 73–105, 2013.
- [R2] B. PICCOLI, F. ROSSI, Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Volume 211, Issue 1, pp. 335–358, 2014.
- [R3] B. PICCOLI, F. ROSSI, On properties of the Generalized Wasserstein distance, soumis, arXiv :1304.7014.
- [R4] P. GOATIN, F. ROSSI, A traffic flow model with non-smooth metric interaction : well-posedness and micro-macro limit, *Communications in Mathematical Sciences*, à paraître.
- [R5] B. PICCOLI, F. ROSSI, E. TRÉLAT, Control to flocking of the kinetic Cucker-Smale model, *SIAM J. Mathematical Analysis* 47, no. 6, pp. 4685–4719, 2015.
- [R6] M. FORNASIER, B. PICCOLI, F. ROSSI, Mean-Field Sparse Optimal Control, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372 : 20130400, 2014.
- [R7] M. BONGINI, M. FORNASIER, F. ROSSI, F. SOLOMBRINO, Mean-Field Pontryagin Maximum Principle, soumis, arXiv :1504.02236.
- [R8] F. ROSSI, Large time behavior for the heat equation on Carnot groups, *Non-linear Differential Equations and applications*, Volume 20, Issue 3, pp. 1393–1407, 2013.
- [R9] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Hypocoelliptic heat kernel on 3-step nilpotent Lie groups, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, Vol. 42, pp. 48–61, 2011.
- [R10] U. BOSCAIN, R. DUIS, F. ROSSI, Y. SACHKOV, Curve cusplless reconstruction via sub-Riemannian geometry, *ESAIM COCV*, Volume 20, Issue 03, pp. 748–770, 2014.
- [R11] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, M. SIGALOTTI, Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems, *Communications in Mathematical Physics*, Volume 333, Issue 3, pp. 1225–1239, 2015.
- [R12] F. ROSSI, P. COLANERI, R. SHORTEN, Padé discretization for systems with piecewise linear Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, issue 11, pp. 2717–2722, 2011.
- [R13] S. SAJJA, F. ROSSI, P. COLANERI, R. SHORTEN, Extensions of “Padé Discretization for Linear Systems With Polyhedral Lyapunov Functions” for generalised Jordan structures, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 58, Issue 8, pp. 2071–2076, 2013.

La liste complète de mes publications est présentée dans le Curriculum Vitae, en Section 4.3.



## Remerciements

Je tiens à remercier vivement L. Ambrosio, P. Degond et C. Prieur, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. L'attention qu'ils ont portée à mon travail et les commentaires très constructifs me touchent profondément. Je remercie aussi sincèrement H. Hammouri, rapporteur initial, pour sa contribution et ses encouragements.

Je suis très reconnaissant aux autres examinateurs Y. Chitour, F. Jean et B. Maury. Leurs travaux scientifiques ont été, à des moments différents, des sources d'inspiration et des modèles. De plus, les conseils amicaux de F. Jean ont été très utiles pour ce mémoire.

Je dois beaucoup à J.-P. Gauthier, tuteur de cette Habilitation et surtout guide significatif dans mon parcours. Son esprit profondément rebel et honnête reste une référence, autant humaine que scientifique.

Ce mémoire est en grand partie le fruit de ma collaboration avec B. Piccoli. Sa passion et son dynamisme sont contagieux. Il transmet une grande envie de construire et d'avancer à tous ses collaborateurs. En cela, il est un grand éducateur et aussi un ami.

J'exprime ma gratitude envers U. Boscain, mon directeur de thèse, qui reste le meilleur conseiller dans les moments de doute. Mes remerciements vont aussi aux nombreux collègues et amis de la communauté du contrôle.

Je veux remercier les nombreux collaborateurs avec lesquels j'ai eu le plaisir de travailler : tout particulièrement A. Agrachev, E. Trélat, P. Goatin, M. Fornasier et ses élèves, R. Shorten et P. Colaneri.

J'exprime ma reconnaissance au LSIS, mon laboratoire d'accueil, représenté par M. Ouladsine et A. Giua. Une mention spéciale pour R. Outbib, L. Brenner, mon thésard J. Marino, B. Alcalá, C. Bonnaud.

Un grand merci aussi à mes collègues dans l'enseignement à Polytech' Marseille. Avec leur disponibilité, ils m'ont permis une grande liberté dans mes collaborations internationales. Je veux ici remercier tout particulièrement R. Bulot, A. Cauvin, A. Ferrarini, K. Adam et M. Messana.

J'en profite pour remercier mes collègues de l'Université Catholique de Brescia pour leur accueil et leur amitié.

Ce travail est aussi l'occasion pour des pensées plus personnelles : à ma famille qui m'accompagne avec beaucoup d'amour et à mes amis dans tant d'endroits différents. Un remerciement particulier à J. Rosay pour son aide avec ce mémoire.

Enfin, je remercie Elisa.



# Table des matières

<b>Présentation générale</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Equation de transport avec vitesse non-locale</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Schémas numériques . . . . .	11
1.3 Distance de Wasserstein généralisée . . . . .	14
1.4 Equation de transport avec noyau à variation bornée . . . . .	17
1.5 Quelques perspectives de recherches . . . . .	20
<b>2 Commande des foules</b>	<b>23</b>
2.1 La limite de champ moyen en présence de commandes . . . . .	25
2.2 Commande du modèle de champ moyen de Cucker et Smale . . . . .	29
2.3 Commande optimale de foules par leaders . . . . .	33
2.4 Quelques perspectives de recherches . . . . .	40
<b>3 Commande géométrique</b>	<b>42</b>
3.1 Equation de la chaleur hypoelliptique . . . . .	43
3.2 Etude du modèle d'imagerie de Petitot . . . . .	54
3.3 Commandabilité des systèmes quantiques . . . . .	60
3.4 Préservation de fonctions de Lyapunov par l'approximation de Padé . . . . .	63
<b>4 Curriculum Vitae</b>	<b>70</b>
<b>Références</b>	<b>80</b>



# Présentation générale

L'étude du comportement collectif d'un grand nombre d'agents en interaction, souvent dénommé "foule", a suscité un grand intérêt de la part des communautés scientifiques. Ce sujet de recherche touche aussi bien le Génie civil (évacuation de bâtiments et problèmes du trafic routier), la Robotique (coordination de robots volants), l'Informatique et la Sociologie (réseaux sociaux), que la Biologie (groupes, troupes et vols d'oiseaux).

Des difficultés majeures sont intimement liées à l'utilisation de ces modèles. En effet, d'un point de vue théorique, la présence d'un grand nombre d'agents rend les outils classiques de l'analyse mathématique peu utiles, car l'espace d'état est de très grande dimension. De plus, pour les foules humaines ou d'animaux, la dynamique de chaque agent n'est pas clairement identifiée, car elle est très sensible aux facteurs intérieurs et extérieurs (comme le stress, la panique, la présence d'obstacles).

C'est pour cela que, stimulés par les multiples défis théoriques et applicatifs, de nombreux chercheurs travaillent sur les modèles de foules.

La première question qu'il est nécessaire de se poser, en ce contexte, concerne le choix d'un cadre mathématique pour la description de la dynamique des agents. La population peut se décrire de trois façons : microscopique, macroscopique ou multi-échelle. Dans l'approche microscopique, la foule est représentée par la position de chaque agent, et sa dynamique est un système d'équations aux dérivées ordinaires de dimension très grande. Dans l'approche macroscopique, la foule est donnée par la densité d'agents, et sa dynamique est une équation aux dérivées partielles (EDP dans la suite), souvent de type transport. Dans l'approche "multi-échelle", dite aussi "granulaire", la population se compose tout autant d'une partie microscopique d'agents "significatifs" (tels que les leaders) que d'une partie macroscopique pour le reste de la foule. Dans cette troisième approche, dans laquelle je développe la plupart de mes recherches, les mesures sont l'outil principal utilisé.

La **Section 1** présente mes résultats d'analyse dans ce contexte. Je m'intéresse à une classe particulière d'EDP pour la dynamique des mesures. Cette classe d'équations de transport avec vitesses non-locales est au cœur des modèles pour les foules. En effet, chaque agent dans une foule est en interaction avec ses voisins, engendrant ainsi une dynamique qui ne dépend pas seulement de sa position (terme locale), mais aussi des positions des autres (terme non-local).

En Section 1.1, j'expose d'abord un cadre assez rigoureux et riche dans lequel les équations de transport avec vitesses non-locales ont de bonnes propriétés : existence et unicité de la solution, dépendance continue, etc. Puis, j'étudie certains schémas numériques pour ces équations, décrits en Section 1.2, et je démontre leur convergence. Je définis ensuite en Section 1.3 une généralisation de la distance de Wasserstein aux mesures de masse variable. Pour cette distance, je prouve des propriétés intéressantes en lien avec l'EDP de transport avec source, et notamment une généralisation de la formule de Benamou-Brenier. Enfin, je présente en Section 1.4 certains résultats spécifiques pour l'équation de transport dans un cadre non-lisse, qui est utilisée dans des modèles de trafic routier.

Au-delà de la description et de l'analyse du comportement collectif, il est intéressant de se demander quels changements un agent extérieur – un gouvernement régulateur ou des leaders, par exemple – peut induire sur une foule.

La plupart des recherches dans ce domaine ont été consacrées à la création de structures ou de règles efficaces, avec un point de vue statique. Aujourd'hui cependant, ce point de vue est remis en question par une vision dynamique et variable dans le temps. On assiste à un changement de paradigme : d'un problème d'optimisation statique on passe à un problème de commande, dépendant du temps et des configurations. Si l'on considère les problèmes d'évacuation, par exemple, avec un point de vue statique, l'infrastructure est conçue dans une configuration donnée et elle ne peut subir aucune modification. Avec le nouveau paradigme dynamique, quand une sortie de secours est congestionnée, on peut introduire des signaux lumineux ou des dispositifs portables pour envoyer la foule vers la direction la plus convenable.

Cette approche introduit le **problème de la commande des foules** : on souhaite comprendre quels changements de comportement peuvent être produits sur la foule par des leaders ou par un régulateur extérieur. Ces problèmes ont déjà été étudiés en automatique pour la coordination d'agents dans des situations très variées, comme les formations de drones en vol, le routing dans les réseaux de télécommunication, les problèmes d'énergie avec les "smart grids".

Dans ce cadre très général, j'ai travaillé à la commande de l'équation de transport avec vitesse non-locale. La **Section 2** en présente les résultats. Je discute d'abord en Section 2.1 d'un problème conceptuel pour la commande des foules. Pour passer d'un modèle microscopique à un modèle macroscopique, l'indistinguabilité des agents est nécessaire : cette propriété s'oppose au fait que les commandes agissent normalement sur des agents précis. Pour cette raison, je présente des problèmes de commande dans deux cas particuliers. En Section 2.2, je montre la commande du modèle de champ moyen de Cucker et Smale vers une configuration d'alignement. C'est l'un des rares résultats en littérature de commande de l'équation de transport avec vitesse non-locale, et le seul avec commande localisée. En Section 2.3, j'étudie un problème de commande optimale où la dynamique est donnée par le couplage d'un système contrôlé pour des leaders avec une EDP de transport pour le reste de la foule. Le résultat principal est la généralisation du Principe de Maximum de Pontryaguine à ce problème de mesures, dans lequel l'équation de Hamilton est écrite comme un gradient de Wasserstein.

Ce mémoire contient aussi plusieurs autres résultats de recherche dans le domaine de l'automatique, de la commande et de l'analyse des EDP. La **Section 3** les décrit plus brièvement. Ces résultats sont assez indépendants par rapport aux sujets présentés dans les sections précédentes. Il est à noter, cependant, que les instruments de recherche utilisés dans les trois sections relèvent tous de la commande géométrique. Je focalise également mon attention sur les modèles d'EDP, et en particulier sur les méthodes de limite permettant de passer d'un système en dimension finie à une EDP associée. Voir des exemples en Sections 1.1, 2, 3.1 et 3.2.

Enfin, un CV détaillé est présenté en Section 4.

# Introduction

The study of the collective behavior of a large number of interacting agents, often called a “crowd”, has drawn a growing attention from several scientific communities. This research topic has an impact on civil engineering (problems of emergency egress and road traffic), robotics (coordination of robots and networked control), computer science and sociology (social networks), and biology (groups, herds and flocks).

Some major difficulties are deeply related to the use of such models. First of all, from the theoretical viewpoint, standard analytical tools are not very useful in this context, since the presence of a large number of agents corresponds to a state space of big dimension. Moreover, for human and animal crowds, the dynamics of each agent is not clearly identified, since it is highly sensitive to internal and external perturbations (such as stress, panic and presence of obstacles).

For these reason, stimulated by the numerous theoretical and applied challenges, a large number of researcher currently works on crowd models.

The first question to address, in this context, is the choice of a mathematical framework for the description of the dynamics of agents. The crowd can be described with three frameworks: microscopic, macroscopic or multi-scale. In the microscopic approach, the crowd is represented by the position of each agent, and its dynamics is a system of ordinary differential equations of very big dimension. In the macroscopic approach, the crowd is given by the density of agents, and its dynamics is a partial differential equation (PDE in the following), often of transport type. In the multi-scale approach, also called “granular”, the population is composed both of a microscopic part of “remarkable” agents (such as leaders), and of a macroscopic part for the rest of the crowd. In this third framework, in which I develop most of my researches, measures are the main tool.

In **Section 1**, I present my results of analysis in this context. I focus on a particular class of PDEs for dynamics of measures. This class of transport equations with non-local velocities is at the core of models for crowds. Indeed, each agent in a crowd interacts with its neighbors, generating a dynamics depending not only on its position (local term), but also on positions of others (non-local term).

In Section 1.1, I describe a rigorous and mathematically rich framework in which transport equations with non-local velocities enjoy good properties: existence and uniqueness of solutions, continuous dependance, etc. I then study some numerical schemes for such equations, described in Section 1.2, for which I also prove convergence. After this, I define in Section 1.3 a generalization of the Wasserstein distance to mass-varying measures. For this distance, I prove interesting properties related to the transport PDE with source, and in particular a generalization of the Benamou-Brenier formula. I finally present in Section 1.4 some specific results for the transport equation in a non-smooth setting, useful for models of road traffic.

Beside the problem of analyzing the collective behavior of crowds, it is interesting to understand what behavior changes can be induced on them by an external agent – e.g. a policy maker or some leaders.

The research mainstream for such problems has been focused on creating efficient facilities or rules, with a static point of view. Recently, such setting has been

challenged by a more dynamic and time-dependent point of view. This implies a change of approach: we pass from a static optimization problem to a control problem, depending on time and on configurations. For example, if we consider emergency egress problems, with a static point of view the infrastructure is designed with a given configuration and it cannot be modified. With the new, dynamical point of view, one can introduce light signals or portable devices to drive the crowd to the best direction.

This innovative approach leads to **the problem of control of crowds**: one wants to understand what changes of behavior can be induced to the crowd by some leaders or by an external policy maker. Such problems have already been studied in control theory for coordination of agents of very different natures, such as flying drones formations, routing in telecommunication networks, smart grids and power network control.

In this general framework, I worked on the control of the transport equation with non-local velocities. My results are presented in **Section 2**. I first discuss in Section 2.1 a theoretical problem for crowd control. When one passes from a microscopic to a macroscopic model, the indistinguishability of agents is a necessary requirement: this is in sharp contrast with the fact that controls are applied to specific agents. For this reason, I present two specific control problems. In Section 2.2, I describe the control the kinetic Cucker-Smale problem to a flocking configuration. This is one of the few known results of control of the transport equation with non-local velocity, and the only one with localized control. Section 2.3 is focused on an optimal control problem for a system coupling a controlled dynamical system for leaders and a transport PDE for the rest of the crowd. The main result is a generalization of the Pontryagin Maximum Principle to this measure setting, in which the Hamiltonian equation is written in terms of a Wasserstein gradient.

This thesis also contains some other research results in control and system theory, as well as analysis of PDEs. They are shortly described in **Section 3**. These results are quite independent with respect to topics in previous sections. Nevertheless, research tools used in the three sections are common, being based on geometric control. Moreover, I focus on PDE models, and in particular on limits permitting to pass from a finite-dimensional system to the associated PDE. See some examples in Sections 1.1, 2, 3.1 and 3.2.

Finally, a Curriculum Vitae is presented in Section 4.

# 1 Equation de transport avec vitesse non-locale

Dans cette section, je présente mes contributions originales liées à l'équation de transport suivante

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot (v[\mu] \mu) = 0. \quad (1)$$

Ici, la variable  $\mu$  est une mesure de probabilité sur l'espace Euclidien  $X = \mathbb{R}^d$ . L'ensemble des mesures de probabilité sur  $X$  sera dénoté avec  $\mathcal{P}(X)$ . L'opérateur  $v : \mathcal{P}(X) \rightarrow \text{Vec}(X)$  associe à chaque mesure  $\mu$  un champ de vecteurs  $v[\mu] \in \text{Vec}(X)$ . La structure de  $v$  rend (1) différente des équations de transport classiques, car  $v[\mu]$  dépend de  $\mu$  globalement, c'est-à-dire que sa valeur dans un point  $x$  ne dépend pas seulement de la valeur<sup>1</sup> de  $\mu$  au point  $x$  même, mais de  $\mu$  sur tout l'espace  $X$ . Ce type de champ de vecteurs est donc appelé "non-local".

L'intérêt pour ce type d'équations n'est pas nouveau : l'un des exemples d'équations de transport avec vitesses non-locales très connus est donné par l'équation de Vlasov

$$\partial \mu + v \cdot \nabla_x \mu + F(t, x) \cdot \nabla_v \mu = 0, \quad (2)$$

dans l'espace des variables  $(x, v)$  position-vitesse, voire [57]. Pour cette équation, et pour d'autres cas spécifiques, plusieurs résultats d'existence et unicité de la solution du problème de Cauchy associé sont connus, ainsi que la dépendance continue par rapport à la donnée initiale, voire par exemple [135, 143] et des cas avec singularité de  $F$  dans [100]. Cependant, le but de mon travail est de donner un cadre formel global pour l'étude de (1), c'est-à-dire que je veux trouver des conditions assez générales sur  $v[\mu]$  assurant les bonnes propriétés pour la solution. En particulier, les résultats d'existence et unicité de la solution de (1) ont été prouvés par Ambrosio et Gangbo en [6], alors que la dépendance continue est démontrée dans ma publication [R1]. Je rappelle ces résultats en Section 1.1.

Mes contributions dans ce domaine ont été stimulées par les modèles de ce type pour la description de foules. En effet, plusieurs modèles sont décrits en termes de (1), tels que les foules de piétons [47, 48, 52, 98, 124, 139], les vols d'oiseaux [11, 30, 39, 45, 107, 115, 142, 151], les robots en formation [108], ou les réseaux socio-économiques [14, 59, 78, 127, 128]. Une liste non-exhaustive de références sur le sujet d'un point de vue scientifique, biologique et même politique se trouve dans les livres [10, 28, 81, 89] et dans les articles [38, 80, 113, 114, 126, 137, 142].

La forme de l'équation (1) permet aussi d'unifier les modèles microscopiques (pour un nombre  $N$  fini d'agents) et macroscopiques (pour l'évolution de la densité). Dans une foule de  $N$  agents, le comportement de chaque agent est déterminé non seulement par sa position et par son objectif (par exemple sortir d'une pièce), mais aussi par la configuration des autres agents ; sa dynamique sera donc dépendante de la position du reste de la foule. En supposant les agents indistinguables, la dynamique de la foule ainsi résultante peut être écrite dans la forme (1), avec

---

1. On notera d'ailleurs que la valeur  $\mu(x)$  n'est pas définie pour une mesure  $\mu$  quelconque, mais seulement pour les mesures absolument continues par rapport à une mesure de référence, normalement la mesure de Lebesgue.

$\mu$  somme de  $N$  deltas de Dirac (mesure empirique) et  $v$  non-locale, pour prendre justement en compte les interactions entre agents. Cette approche peut être ultérieurement développée en considérant la limite du système quand le nombre d'agents  $N$  tend vers l'infini. Ce procédé, dit limite de champ moyen, donne lieu à des modèles macroscopiques décrivant l'évolution de la densité, toujours dans la forme (1). La définition précise, ainsi que certains problèmes de commande pour ce type d'équations que j'ai étudiés, sont présentés en Section 2.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la Section 1.1 d'introduction, avant d'exposer mes propres résultats, je présente l'état de l'art pour l'analyse de l'équation (1). En particulier, je rappelle les résultats de Ambrosio-Gangbo [6] sur l'existence et l'unicité de la solution de (1), ainsi que la définition de la distance de Wasserstein et son intérêt fondamental pour l'étude de cette équation.

Mes premiers résultats sur ce sujet sont illustrés en Section 1.2, où je prouve la convergence de certains schémas numériques proposés par Piccoli-Tosin [119].

Dans la Section 1.3, je définis la distance de Wasserstein généralisée que j'ai introduite, en collaboration avec B. Piccoli, pour étudier le cas plus général des mesures à masse variable et l'équation de transport avec source. J'établis aussi une généralisation de la formule de Benamou-Brenier aux mesures à masse variable.

La Section 1.4 est consacrée à l'étude de l'équation (1) dans un cas moins régulier que celui étudié par Ambrosio-Gangbo. Je démontre des résultats d'existence et unicité de la solution (en temps petit) quand la densité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et quand le champ de vecteurs est donné par un noyau d'interaction à variation bornée.

Mes travaux sur les équations avec vitesses non-locales ont commencé deux ans après ma thèse, dans un domaine de recherche tout à fait nouveau pour moi. J'ai d'abord été guidé par B. Piccoli, avec lequel je collabore depuis 2011. Les Sections 1.2 et 1.3 résument nos travaux communs, publiés dans [R1],[R2],[R3]. Ensuite, j'ai établi de façon indépendante de nouvelles collaborations sur ce sujet, notamment avec P. Goatin depuis 2014. Les résultats présentés en Section 1.4 ont été développés en collaboration avec elle et publiés dans [R4]. En conséquence, toutes les sections suivantes contiennent des résultats originaux, exceptée la Section 1.1 qui introduit le problème.

Comme déjà remarqué, ces résultats étant établis en collaboration avec plusieurs chercheurs, il est difficile et peu naturel de vouloir séparer ma contribution personnelle de celles de mes collègues. Dans le reste de cette section, une forme verbale plurielle a donc été préférée.

## 1.1 Introduction

Cette section est consacrée à l'étude du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \nabla \cdot (v[\mu] \mu) = 0, \\ \mu(t=0) = \mu_0. \end{cases} \quad (3)$$

Après avoir formellement défini les éléments de ce problème et le concept de solution, nous allons présenter les résultats (assez récents) d'existence et unicité de la solution. Pour ce faire, nous introduisons la distance de Wasserstein, qui est l'outil fondamental pour l'étude de ces équations.

Dans le problème (3), la fonction  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  représente une courbe continue dans  $\mathcal{P}(X)$ , l'espace des mesures de probabilité sur l'espace Euclidien  $X = \mathbb{R}^n$ , doté de la topologie de la convergence des mesures, dont nous rappelons la définition ici.

**Définition 1.1.** *Une séquence de mesures de probabilité  $\mu_n \in \mathcal{P}(X)$  converge vers une mesure de probabilité  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  si pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(X)$  il vaut  $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ . Dans ce cas, nous écrivons*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu.$$

La continuité de la courbe  $\mu$  permet de donner du sens à la condition initiale  $\mu(t=0) = \mu_0$ . La fonctionnelle  $v : \mathcal{P}(X) \rightarrow \text{Vec}(X)$  associe à chaque mesure de probabilité (considérée globalement) un champ de vecteurs sur  $X$ . Pour plus de détails sur la théorie de la mesure utilisée dans la suite, voire par exemple [63].

Nous rappelons maintenant le concept de solution du problème (3).

**Définition 1.2.** *Une courbe  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est une solution pour le problème de Cauchy (3) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

— *pour toute fonction  $f \in C_c^\infty((0, T) \times X)$  il vaut*

$$\int_{[0, T] \times X} \partial_t f(t, x) d\mu(t, x) + \int_{[0, T] \times X} \nabla f(t, x) \cdot v[\mu] d\mu(t, x) = 0; \quad (4)$$

—  *$\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est une courbe continue en considérant  $\mathcal{P}(X)$  doté de la topologie de la convergence des mesures, et elle satisfait  $\mu(t=0) = \mu_0$ .*

Nous nous intéressons maintenant à la régularité de la fonctionnelle  $v$  qui permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3). Pour simplifier, nous imposons d'abord une borne uniforme sur les constantes de Lipschitz et sur la norme des champs des vecteurs dans l'image de  $v$ . Nous assumons l'existence de  $L, M$  tels que  $v[\mu]$  satisfait

$$|v[\mu](x) - v[\mu](y)| \leq L|x - y| \quad |v[\mu](x)| \leq M \quad (5)$$

pour tout  $\mu \in \mathcal{P}(X), x, y \in X$ . Il est maintenant nécessaire de trouver une condition naturelle liant les valeurs de  $v$  pour deux différentes mesures  $\mu, \nu$ . Si cette condition

est, en analogie avec les équations aux dérivées ordinaires, la Lipschitzianité de  $v$  par rapport à son argument  $\mu$ , il faut préciser la métrique de l'espace  $\mathcal{P}(X)$ .

Tout d'abord, nous avons observé que la distance de la variation totale entre mesures de probabilité (généralisant la distance  $L^1$ ) n'est pas la métrique adaptée à ce problème. Plus précisément, nous avons donné un exemple de ce type.

**Exemple 1.3.** *Il existe une fonctionnelle  $v$  satisfaisant la condition (5) et la condition de Lipschitzianité suivante :*

- *$v$  est une fonction Lipschitzienne par rapport à la métrique de la variation totale, c'est-à-dire qu'il existe  $K$  tel que pour tous  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\|v[\mu] - v[\nu]\|_{C^0} \leq K \|\mu - \nu\|_{TV}. \quad (6)$$

*et telle qu'il existe une mesure  $\mu_0 \in \mathcal{P}(X)$  telle que la solution de (3) n'est pas unique.*

L'exemple est décrit en détail en Section 6 de [R1].

Une autre distance se montre en effet beaucoup plus adaptée à l'étude de l'équation (1) : la distance de Wasserstein. Etant donné deux mesures de probabilité  $\mu$  et  $\nu$ , nous définissons d'abord un plan de transport  $\pi$  dans  $\mathcal{P}(X \times X)$  comme une mesure de probabilité avec première et deuxième marginales  $\mu$  et  $\nu$ , respectivement. En définissant  $\Pi(\mu, \nu)$  l'ensemble de tous ces plans de transport, et

$$J(\pi) := \int_{X \times X} |x - y|^p d\pi(x, y)$$

le coût du transport de  $\mu$  à  $\nu$  par  $\pi$ , la distance de Wasserstein de paramètre  $p \geq 1$  est définie par

$$W_p(\mu, \nu) := \inf \{J(\pi) \mid \pi \in \Pi(\mu, \nu)\}^{1/p}. \quad (7)$$

Il est bien connu que, pour tout  $\mu, \nu$ , l'ensemble  $\Pi(\mu, \nu)$  n'est pas vide, et la borne inférieure dans le terme droit de (7) est toujours atteinte. Cette borne est finie dans l'espace  $\mathcal{P}_p(X)$  des mesures de moment  $p$  fini, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } \int_X |x|^p d\mu(x) < +\infty \right\}. \quad (8)$$

Nous rappelons que dans cet espace la métrique de Wasserstein métrise la convergence des mesures, voire par exemple [144].

**Théorème 1.4.** *Soit  $\mu_n \in \mathcal{P}_p(X)$ . Alors*

$$W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0 \quad \text{est équivalent à} \quad \mu_n \rightharpoonup \mu \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |x|^p d\mu_n < \infty.$$

Pour cette raison, nous considérons maintenant le problème (3) dans le sous-espace  $\mathcal{P}_p(X)$ . Pour une discussion détaillée de la distance de Wasserstein, voire par

exemple [144, 145].

Le résultat fondamental de cette section est que, si on remplace la métrique de la variation totale avec la distance de Wasserstein dans la condition (6), alors le problème de Cauchy (3) admet une solution unique, qui existe pour tout temps  $T > 0$ . Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.5.** *Considérons le problème (3), avec la fonctionnelle*

$$v[\mu] : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(X) & \rightarrow & \text{Vec}(X) \\ \mu & \mapsto & v[\mu] \end{array}$$

*satisfaisant les conditions (H) suivantes*

**(H)**

—  $v[\mu]$  est uniformément Lipschitzienne et uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe  $L, M$  ne dépendant pas de  $\mu$ , tels que pour tout  $\mu \in \mathcal{P}_p(X), x, y \in X$ ,

$$|v[\mu](x) - v[\mu](y)| \leq L|x - y| \quad |v[\mu](x)| \leq M.$$

—  $v$  est une fonction Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe  $K$  tel que

$$\|v[\mu] - v[\nu]\|_{C^0} \leq KW_p(\mu, \nu).$$

Alors, pour tout  $\mu_0 \in \mathcal{P}_p(X)$  et tout  $T > 0$  il existe une et une seule solution  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_p(X)$  du problème (3).

Ce résultat a été établi par Ambrosio-Gangbo dans [6]. Dans nos contributions, nous avons démontré certaines propriétés auxiliaires utiles dans ce contexte ; nous avons étudié l'évolution de la distance de Wasserstein pour les solutions de (3) et la généralisation au cas de  $v[\mu]$  à croissance sub-linéaire. Des résultats de ce type étaient déjà disponibles pour des cas particuliers de (1), comme par exemple pour l'équation de Vlasov (2), voire [135, Thm 5.1].

Pour introduire nos résultats, il est nécessaire de rappeler qu'il est possible de trouver explicitement la solution de (3) quand la fonctionnelle  $v$  ne dépend pas de  $\mu$  ; l'équation de transport devient ainsi linéaire. Cette solution se trouve en utilisant le push-forward d'une mesure (mesure image), dont la définition est rappelée ici.

**Définition 1.6.** *Soit  $f : X \rightarrow X$  un difféomorphisme de l'espace  $X$ , et  $\mu$  une mesure de probabilité dans  $\mathcal{P}(X)$ . La mesure push-forward  $f\#\mu$  est ainsi définie :  $f\#\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$  pour tous les ensembles  $E$  tels que  $f^{-1}(E)$  est  $\mu$ -mesurable.*

Etant donné un champ de vecteurs  $v$ , on peut définir le flot associé  $\phi_t^v(\cdot)$  au temps  $t$ , c'est-à-dire la fonction qui à chaque point  $x_0 \in X$  associe la solution unique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (9)$$

Le flot est un difféomorphisme. En conséquence, étant donné une mesure  $\mu_0 \in \mathcal{P}(X)$ , nous pouvons définir la courbe  $\mu_t := \phi_t^v \# \mu_0$ . Le résultat fondamental associant le flot du problème en dimension finie (9) à l'équation de transport est le suivant, voire [144, Theorem 5.34]. Il s'agit d'une re-écriture de la **méthode des caractéristiques**, généralisée à l'espace des mesures.

**Théorème 1.7.** *Soit  $v$  un champ de vecteurs. Il existe une et une seule solution de l'équation de transport linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \nabla \cdot (v \mu) = 0, \\ \mu(t=0) = \mu_0. \end{cases}$$

*Cette solution satisfait  $\mu(t) = \phi_t^v \# \mu_0$ , où  $\phi_t^v$  est le flot au temps  $t$  de l'équation (9).*

En conséquence, les estimations suivantes de la distance Wasserstein sont utiles pour l'étude de (1). Voir nos contributions dans [R1] et [R2].

**Proposition 1.8.** *Etant donné  $v, w$  champs de vecteurs bornés et Lipschitziens avec constante de Lipschitz  $L$  and  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ , les estimations suivantes sont établies :*

1.  $W_p(\phi_t^v \# \mu, \phi_t^v \# \nu) \leq e^{\frac{p+1}{p}Lt} W_p(\mu, \nu)$ ,
2.  $W_p(\mu, \phi_t^v \# \mu) \leq t \|v\|_{C^0}$ ,
3.  $W_p(\phi_t^v \# \mu, \phi_t^w \# \nu) \leq e^{\frac{p+1}{p}Lt} W_p(\mu, \nu) + \frac{e^{Lt/p}(e^{Lt}-1)}{L} \|v - w\|_{C^0}$ .

*Idée de la preuve.* La preuve est simple : pour la condition 1, nous considérons un plan de transport  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  réalisant  $W_p(\mu, \nu)$  et observons que  $\pi' := (\phi_t^v \times \phi_t^v) \# \pi \in \Pi(\phi_t^v \# \mu, \phi_t^v \# \nu)$ . Nous pouvons donc estimer la distance grâce au coût de  $J(\pi')$ , qui est borné par le terme de droite. Les preuves des conditions 2 et 3 sont similaires.  $\square$

La conséquence fondamentale de ces estimations est la dépendance Lipschitzienne de la solution de (3) par la donnée initiale  $\mu_0$ . Nous l'avons prouvée dans [R1] et améliorée dans [R2] e [R4], voire aussi [143].

**Théorème 1.9.** *Etant donné  $v$  satisfaisant (H), et les deux solutions  $\mu, \nu$  de (3) avec donnée initiale  $\mu_0$  et  $\nu_0$  respectivement, nous avons*

$$W_p(\mu(t), \nu(t)) \leq e^{4t(L+K)} W_p(\mu_0, \nu_0).$$

Des estimations similaires assurent la dépendance Lipschitzienne de la solution de (3) par le champ de vecteurs  $v$ . Il est à noter que la Proposition 1.8 montre quelles sont les métriques “naturelles” pour les éléments en question : la distance Wasserstein pour les mesures de probabilité et la métrique  $C^0$  (ou métrique de la borne supérieure) pour les champs de vecteurs. Ce cadre, assez rigide, sera remis en question en Section 1.4 : nous établirons des résultats d'existence et unicité, quand le champ de vecteurs est défini par convolution avec un noyau à variation bornée. Par contre, nous serons obligés de restreindre notre étude aux mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, il sera possible de n'avoir la définition de la solution que pour un temps borné.

Comme déjà dit, nous avons établi une généralisation du Théorème 1.5 au cas de croissance sub-linéaire de  $v[\mu]$ . Il est intéressant de remarquer que nous devons réduire nos solutions au sous-espace  $\mathcal{P}_0(X)$  des mesures à support borné, pour avoir une vitesse bornée à chaque instant  $t$ . Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.10.** *Soit  $v$  satisfaisant **(H)**, en remplaçant  $v[\mu](x) \leq M$  avec  $v[\mu](x) \leq M(1 + |x|)$ . Alors, pour tout  $T > 0$  et tout  $\mu_0 \in \mathcal{P}_0(X)$  il existe une et une seule solution  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$  de (3).*

*Idée de la preuve.* La preuve se base sur le fait que, pour un champ de vecteurs à croissance sub-linéaire, le flot est bien défini pour tout temps et il est un difféomorphisme. Nous avons donc pu adapter les résultats du Théorème 1.7 à l'équation de transport (1) avec  $v[\mu]$  à croissance sub-linéaire.  $\square$

Ce résultat a été motivé par l'étude de certains modèles d'interaction entre agents, notamment le modèle de Cucker et Smale, où les champs de vecteurs ont une croissance sub-linéaire. Ces modèles, et nos contributions dans ce domaine, seront présentés en Section 2.

**Remarque 1.11.** *La théorie présentée en cette section peut être développée dans un espace  $X$  qui n'est pas nécessairement un espace Euclidien (ou une sous-variété). La définition des mesures requiert  $X$  espace de mesure ; la bonne définition de l'équation de transport requiert  $X$  variété différentielle ; la définition de la distance Wasserstein requiert  $X$  espace Polonais, c'est-à-dire espace métrique complet et séparable, et localement compact. En conséquence, on imposera que  $X$  soit un espace Polonais.*

*Nous n'avons pas travaillé dans des variétés non-Euclidiennes, car les modèles de foules sont suffisamment bien décrits par des systèmes dans  $\mathbb{R}^d$ . Une exception intéressante est donnée par notre travail sur l'évolution de la forme de cellules grâce à la diffusion d'un signal de croissance sur la surface. Ce problème de commande d'une équation couplée transport-chaaleur a été introduit dans [123]. Les résultats étant encore préliminaires, nous ne les présentons pas dans ce mémoire.*

## 1.2 Schémas numériques

Dans cette section, nous présentons nos résultats concernant des schémas numériques approchant la solution du problème de Cauchy (3). Ces travaux ont été publiés dans [R1], qui contient aussi les preuves des résultats résumés ici.

Un premier schéma, purement formel, que nous proposons pour l'approximation de la solution de (3), correspond à la méthode d'Euler explicite. L'intervalle temporel  $[0, T]$  est décomposé en  $2^k$  intervalles  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  avec  $\Delta t = 2^{-k}T$ , et la solution approchée  $\mu^F$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$  est donnée par l'évolution au temps  $\Delta t$  de  $\mu^F(n\Delta t)$  en suivant le champ de vecteur  $v[\mu^F(n\Delta t)]$ . Plus précisément, nous définissons :

### SCHÉMA FORMEL

$$\mu^F(0) := \mu_0, \quad \mu((n+1)\Delta t) := \phi_{\Delta t}^{v[\mu^F(n\Delta t)]} \# \mu^F(n\Delta t).$$

Ce schéma est formel, dans le sens qu'il est en général impossible d'écrire le flot  $\phi_{\Delta t}^{v[\mu^F(n\Delta t)]}$ , car cela correspondrait à intégrer le champ vectoriel  $v[\mu^F(n\Delta t)]$ . Cependant, ce schéma nous permet de trouver une forme approchée pour la solution de (3), sur laquelle il a été possible d'utiliser les estimations de la Proposition 1.8, pour prouver le résultat de dépendance continue établi dans le Théorème 1.9.

Un deuxième schéma, introduit en Section 4.3 de [R1], est défini de la façon suivante : nous discrétisons l'espace  $X = \mathbb{R}^d$  en  $d$ -hypercubes de côté  $\Delta x$  et l'intervalle temporel  $[0, T]$  en  $2^k$  intervalles  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  avec  $\Delta t = 2^{-k}T$ . Dans chaque hypercube  $\square$ , la donnée initiale  $\mu_0$  est approchée par une mesure  $\mu^L(0)$  qui a une densité de probabilité constante de valeur  $\frac{\mu_0(\square)}{\Delta x^n}$ . Ensuite, l'évolution du cube est donnée par la translation par le vecteur  $\Delta t \cdot v[\mu^L(0)](x_\square)$ , où  $v[\mu^L(0)](x_\square)$  est le champ de vecteurs évalué au centre  $x_\square$  du cube même. La mesure  $\mu^L(\Delta t)$  est calculée en additionnant tous ces cubes après translation. Pour le temps  $2\Delta t$ , chaque cube évolue en suivant le vecteur  $v[\mu^L(\Delta t)](x_\square)$ , et ainsi de suite. Nous appelons ce schéma **Lagrangien**, car nous étudions le déplacement de chaque cube tout au long du temps.

### SCHEMA LAGRANGIEN

**INITIALISATION** : Fixons un paramètre de discrétisation dans l'espace  $\Delta x$  et un paramètre de discrétisation dans le temps  $\Delta t$ .

Etant donné une mesure initiale  $\mu_0$ , définissons  $\mu_0^L$  comme le discrétisé de  $\mu_0^L$  sur la grille  $\boxplus$  de pas  $\Delta x$ .

**PAS  $i+1$**  : Etant donné  $\mu_{i\Delta t}^L$ , définissons pour  $t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t]$

$$\mu_t^L := \sum_{\square_0 \in \boxplus} \mu_{i\Delta t}^L(\square_0) \frac{\chi_{\square_t}}{\Delta x^n}$$

avec  $\square_t = \square_{i\Delta t} + (t - i\Delta t) v(\square_{i\Delta t})$ , où  $v(\square_{i\Delta t}) := v[\mu_{i\Delta t}^L](x_{\square_{i\Delta t}})$  et  $x_{\square_{i\Delta t}}$  est le centre du carré  $\square_{i\Delta t}$ .

**STOP** : quand le temps  $T$  est atteint.

L'avantage de ce schéma Lagrangien est qu'il est explicite, car il est possible de calculer explicitement la translation de chaque cube. Le désavantage principal réside dans le fait que la discrétisation spatiale n'est utilisée que pour la donnée initiale; ensuite, les cubes ne font plus partie du grillage initial. La mise en mémoire et les calculs associés pour calculer  $\mu^L$  et  $v[\mu^L]$  résultent donc de difficile gestion.

Pour palier à ce problème, nous définissons un troisième schéma, dont la solution est notée  $\mu^E$ . Etant donné la mesure initiale  $\mu_0$ , nous la discrétisons de la même façon que dans le schéma précédent, en ayant donc  $\mu^E(0) = \mu^L(0)$ . Nous calculons de façon identique aussi l'évolution de chaque cube à l'instant  $\Delta t$ , en retrouvant

$\mu^L(\Delta t)$ . La différence avec le schéma Lagrangien arrive maintenant, car nous calculons  $\mu^E(\Delta t)$  en discrétisant  $\mu^L(\Delta t)$  sur la même grille initiale. Ensuite, à chaque pas temporel, nous utilisons l'évolution des cubes décrite dans le schéma Lagrangien et nous appliquons la discrétisation sur la grille initiale.

### SCHÉMA EULÉRIEN

**INITIALISATION** : Fixons un paramètre de discrétisation dans l'espace  $\Delta x$  et un paramètre de discrétisation dans le temps  $\Delta t$ .

Etant donné une mesure initiale  $\mu_0$ , définissons  $\mu_0^L$  comme le discrétisé de  $\mu_0^L$  sur la grille  $\boxplus$  de pas  $\Delta x$ .

**PAS  $i+1$**  : Définissons

$$\mu'_{(i+1)\Delta t} := \sum_{\square \in \boxplus} \mu_{i\Delta t}^E(\square) \frac{\chi_{\square + \Delta t v_{i\Delta t}(\square)}}{\Delta x^n}$$

avec  $v_{i\Delta t}(\square) := v[\mu_{i\Delta t}^E](x_\square)$  et  $x_\square$  centre de  $\square$ .

Définissons  $\mu_{(i+1)\Delta t}^E$  comme le discrétisé de  $\mu'_{(i+1)\Delta t}$  sur la grille  $\boxplus$ .

**STOP** : quand le temps  $T$  est atteint.

En conséquence, la mesure  $\mu^E(n\Delta t)$  reste toujours sur la même grille initiale  $\boxplus$ , et seulement les valeurs dans chaque cube varient. Pour cette raison, nous appelons ce schéma **Eulérien**, car nous observons l'évolution de la valeur de la mesure à chaque point spatial fixé.

Les schémas ici décrits ont été proposés par Piccoli-Tosin dans [119] pour l'étude de la dynamique des foules. Notre contribution a été de prouver les conditions pour la convergence de ces schémas. En particulier, nous avons les résultats suivants.

**Proposition 1.12.** *Soit  $v$  satisfaisant **(H)** et  $\mu_0 \in \mathcal{P}_p(X)$  une mesure donnée. Soit  $\mu = \mu([0, T])$  la solution exacte de (3), et  $\mu^L = \mu^L([0, T])$  la solution approchée en utilisant le schéma Lagrangien avec paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . Il existe deux constantes<sup>2</sup>  $C_1, C_2$  telles que*

$$W_p(\mu(T), \mu^L(T)) \leq C_1(T, L, K) \Delta x + C_2(T, L, M, K) \Delta t.$$

*En particulier,  $\mu^L$  converge vers  $\mu$  dans  $C([0, T], \mathcal{P}_p(X))$  pour  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .*

*Sous les mêmes hypothèses, soit  $\mu^E = \mu^E([0, T])$  la solution approchée en utilisant le schéma Eulérien. Il vaut  $W_p(\mu(T), \mu^E(T)) \leq W_p(\mu(T), \mu^L(T)) + W_p(\mu^L(T), \mu^E(T))$  et*

— *pour  $p > 1$  il existe une constante  $C_3$  telle que*

$$W_p(\mu^L(T), \mu^E(T)) \leq C_3(L, T, K, n) \Delta x 2^{(1-1/p)\frac{T}{\Delta t}}. \quad (10)$$

---

2. Pour la forme explicite des constantes  $C_1, C_2$  et  $C_3, C_4$  suivantes, voire [R1].

En conséquence, pour  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta x 2^{(1-1/p)\frac{T}{\Delta t}} \rightarrow 0$ ,  $\mu^E$  converge vers  $\mu$  dans  $C([0, T], \mathcal{P}_p(X))$  ;

— pour  $p = 1$  il existe une constante  $C_4$  telle que

$$W_p(\mu^L(T), \mu^E(T)) \leq C_4(L, T, K, N) \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (11)$$

En conséquence,  $\mu^E$  converge vers  $\mu$  dans  $C([0, T], \mathcal{P}_p(X))$  pour  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 0$ .

**Remarque 1.13.** La condition de convergence donnée pour le schéma Eulérien pour  $p = 1$  est surprenante, si comparée à la condition de Courant-Friedrichs-Lewy pour la convergence des schémas des équations de transport. Nous rappelons que cette condition bien connue est la suivante :  $\lim_{\Delta x, \Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$ , voire par exemple [73].

La différence principale avec notre résultat est que la condition de CFL est utilisée quand la distance entre mesures est la distance de la variation totale (distance  $L^1$ ). Dans notre cas, ce choix n'est pas naturel, comme déjà expliqué auparavant.

### 1.3 Distance de Wasserstein généralisée

Dans cette section, nous exposons nos contributions à la généralisation de la distance de Wasserstein à l'espace des mesures de masse finie quelconque. Cette généralisation est intéressante, notamment pour la description de phénomènes de transport avec source. L'équation étudiée est la suivante :

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot (v[\mu] \mu) = h[\mu], \quad (12)$$

où  $h[\mu]$  est une source, dépendante de la mesure  $\mu$  elle-même. Nous présentons donc ici une métrique adaptée à cette équation : les bonnes conditions sur  $h$  par rapport à cette métrique donneront existence et unicité de la solution, convergence des schémas numériques, etc... Nous prouvons aussi en Section 1.3.1 une généralisation de la formule de Benamou-Brenier aux mesures à masse variable.

La distance de Wasserstein classique peut facilement être généralisée dans le cas de deux mesures de masse identiques, par exemple en définissant

$$W_p(\mu, \nu) = |\mu| W_p(|\mu|^{-1} \mu, |\mu|^{-1} \nu),$$

où  $|\mu| = \mu(X)$  est la masse totale de  $\mu$ . Le problème principal est que cette distance n'est pas définie entre deux mesures de masse totale différente. Plus précisément, on peut définir  $W_p(\mu, \nu) = +\infty$  si  $|\mu| \neq |\nu|$ .

Pour cette raison, nous avons proposé dans [R2] une **distance de Wasserstein généralisée**, combinant une contribution de type Wasserstein à une contribution de type  $L^1$ . Sa définition formelle est la suivante.

**Définition 1.14.** Soit  $\mathcal{M}_B(X)$  l'espace des mesures à masse totale bornée,  $a, b > 0$  deux paramètres, et  $p \geq 1$ . La distance de Wasserstein généralisée de paramètres  $a, b, p$  est la suivante :

$$W_p^{a,b}(\mu, \nu) = \inf_{\substack{\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p(X) \\ |\tilde{\mu}| = |\tilde{\nu}|}} \left( a^p (|\mu - \tilde{\mu}| + |\nu - \tilde{\nu}|)^p + b^p W_p^p(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right)^{1/p}, \quad (13)$$

où  $\mathcal{M}_p(X)$  est l'espace des mesures avec moment  $p$  borné.

La définition montre bien cette approche couplée Wasserstein- $L^1$  : les mesures  $\mu, \nu$  sont décomposées en  $\tilde{\mu}, \mu - \tilde{\mu}$  et  $\tilde{\nu}, \nu - \tilde{\nu}$ , respectivement. Ensuite, la composante  $\tilde{\mu}$  est transportée sur la composante  $\tilde{\nu}$  et son coût est de type Wasserstein ; le coût des composantes restantes  $\mu - \tilde{\mu}$  et  $\nu - \tilde{\nu}$  est de type  $L^1$ .

Nous avons prouvé en [R2] et [R3] plusieurs propriétés utiles de cette distance de Wasserstein généralisée. Nous en résumons ici les principales.

**Proposition 1.15.** *La distance  $W_p^{a,b}$  satisfait les propriétés suivantes :*

1. la borne inférieure dans (13) est atteinte, et un minimum satisfait  $\tilde{\mu} \leq \mu$  et  $\tilde{\nu} \leq \nu$  ;
2. les estimations sur le flot de Proposition 1.8 sont valables pour  $W_p^{a,b}$  aussi, dans la forme suivante :
  - $W_p^{a,b}(\phi^t \# \mu, \phi^t \# \nu) \leq e^{Lt} W_p^{a,b}(\mu, \nu)$ ,
  - $W_p^{a,b}(\mu, \phi^t \# \mu) \leq bt \|v\|_{C^0} |\mu|$ ,
  - $W_p^{a,b}(\phi^t \# \mu, \psi^t \# \nu) \leq e^{Lt} W_p^{a,b}(\mu, \nu) + \frac{e^{Lt}-1}{L} |\mu| \sup_{\tau \in [0,t]} \|v_t - w_t\|_{C^0}$ .
3. l'espace  $\mathcal{M}_B(X)$  est complet par rapport à la métrique  $W_p^{a,b}$  ;
4. la distance  $W_p^{a,b}$  métrise la convergence des mesures, dans le sens que

$$W_p^{a,b}(\mu_n, \mu) \rightarrow 0 \quad \text{est équivalent à} \quad \mu_n \rightharpoonup \mu \quad \text{et} \quad \{\mu_n\} \text{ est tendue,}$$

où la condition de la tension est la suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $K_\varepsilon$  compact tel que  $\mu_n(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En revenant à l'étude de l'équation (12), nous avons prouvé dans [R2] le résultat suivant.

**Théorème 1.16.** *Considérons le problème*

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \nabla \cdot (v[\mu] \mu) = h[\mu], \\ \mu(t=0) = \mu_0, \end{cases} \quad (14)$$

avec les fonctionnelles

$$v[\mu] : \mathcal{M}_B(X) \rightarrow C^1(X) \cap L^\infty(X) \quad \text{et} \quad h[\mu] : \mathcal{M}_B(X) \rightarrow \mathcal{M}_B(X)$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- $v[\mu]$  est uniformément Lipschitzienne et uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe  $L, M$  ne dépendant pas de  $\mu$ , tels que pour tout  $\mu \in \mathcal{M}_B(X), x, y \in X$ ,

$$|v[\mu](x) - v[\mu](y)| \leq L|x - y| \quad |v[\mu](x)| \leq M.$$

- $v$  est une fonction Lipschitzienne par rapport à  $W_p^{a,b}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $K$  tel que

$$\|v[\mu] - v[\nu]\|_{C^0} \leq KW_p^{a,b}(\mu, \nu).$$

—  $h[\mu]$  est à masse et à support uniformément bornés, c'est-à-dire qu'il existe  $P, R$  tels que

$$h[\mu](X) \leq P, \quad \text{supp}(h[\mu]) \subseteq B_R(0).$$

—  $h$  est une fonction Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe  $Q$  tel que

$$W_p^{a,b}(h[\mu], h[\nu]) \leq QW_p^{a,b}(\mu, \nu).$$

Alors, pour tout  $\mu_0 \in \mathcal{M}_B(X)$  à support borné et tout  $T > 0$  il existe une et une seule solution  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_b(X)$  du problème (14).

*Idée de la preuve.* La preuve est analogue à celle du Théorème 1.5, en utilisant une variante du schéma formel proposé en Section 1.2 : à chaque étape, nous faisons évoluer la mesure  $\mu(n\Delta t)$  par le flot de  $v[\mu(n\Delta t)]$  et nous rajoutons une masse  $\Delta t h[\mu(n\Delta t)]$ . Il est possible de démontrer que ce schéma est convergent pour  $\Delta t \rightarrow 0$ , qu'il converge vers une solution de (14) et que toute solution de (14) est de ce type.  $\square$

De façon similaire, les schémas Lagrangien et Eulérien peuvent être adaptés à la présence de sources, et leur convergence est assurée par des estimations équivalentes à celles présentées dans la Proposition 1.12. Pour plus de détails, voire [R2],[R3].

### 1.3.1 La formule de Benamou-Brenier généralisée

Dans cette section, nous montrons un lien profond existant entre la distance de Wasserstein généralisée que nous venons de définir et l'équation (14). Nous prouvons que le choix minimisant la distance de Wasserstein généralisée correspond à un choix de  $v, h$  dans (14) minimisant une certaine fonctionnelle d'action.

Ce lien a d'abord été établi par Benamou et Brenier [15] pour la distance de Wasserstein quadratique classique et l'équation (3). Leur résultat est le suivant.

**Théorème 1.17.** *Soit  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_c^{ac}(X)$ , l'espace des mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit  $V(\mu_0, \mu_1)$  l'ensemble des couples mesure-champ de vitesses  $(\mu, v) := (\mu_t, v_t)_{t \in [0,1]}$  tel que  $\mu \in C([0, 1], \mathcal{P}_c^{ac}(X))$ ,  $v \in L^2(d\mu_t dt)$ ,  $\cup_{t \in [0,1]} \text{supp}(\mu_t)$  est borné, et tel que les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0 \\ \mu|_{t=0} = \mu_0, \quad \mu|_{t=1} = \mu_1. \end{cases} \quad (15)$$

Définissons la fonctionnelle d'action  $\mathcal{A}[\mu, v] := \int_0^1 dt \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_t |v_t|^2 \right)$  dans  $V(\mu_0, \mu_1)$ . Alors, la condition suivante est satisfaite

$$W_2^2(\mu_0, \mu_1) = \inf \{ \mathcal{A}[\mu, v] \mid (\mu, v) \in V(\mu_0, \mu_1) \}. \quad (16)$$

**Remarque 1.18.** Observons que la formule de Benamou-Brenier n'est définie que dans l'espace des mesures de probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Sa généralisation à tout l'espace  $\mathcal{P}_2(X)$  a été prouvée par Ambrosio-Gigli-Savaré [7], comme conséquence de la définition d'une structure différentielle sur  $\mathcal{P}_2(X)$  même.

Pour la distance de Wasserstein généralisée (avec  $p = 2$ ), il faut identifier la fonctionnelle  $\mathcal{B}$  adaptée à la dynamique avec source (14). Dans [R3], nous avons trouvé la fonctionnelle

$$\mathcal{B}[\mu, v, h] := a^2 \left( \int_0^1 dt \left( \int_{\mathbb{R}^d} d|h_t| \right) \right)^2 + b^2 \int_0^1 dt \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_t |v_t|^2 \right).$$

Pour ce choix, nous avons donc prouvé la généralisation suivante.

**Théorème 1.19.** *Fixons  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}_c^{ac}(X)$ . Soit  $Z(\mu_0, \mu_1)$  l'ensemble des triplets mesure-champ de vecteurs-source  $(\mu, v, h) := (\mu_t, v_t, h_t)_{t \in [0,1]}$  satisfaisants les propriétés suivantes :*

- $\mu \in C([0, 1], \mathcal{M}_c^{ac}(X))$  ;
- $v \in L^2(d\mu_t dt)$  ;
- $h \in L^1([0, 1], \mathcal{M}_c^{ac}(X))$  dans le sens que  $\int_0^1 dt \left( \int_{\mathbb{R}^d} d|h_t| \right) < \infty$  ;
- $\cup_{t \in [0,1]} \text{supp}(\mu_t)$  est borné ;
- le triplet satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = h_t, \\ \mu|_{t=0} = \mu_0, \quad \mu|_{t=1} = \mu_1. \end{cases} \quad (17)$$

Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\left( W_2^{a,b}(\mu_0, \mu_1) \right)^2 = \inf \{ \mathcal{B}[\mu, v, h] \mid (\mu, v, h) \in Z(\mu_0, \mu_1) \}. \quad (18)$$

*Idée de la preuve.* La preuve de ce résultat, en Section 4 de [R3], se base sur l'observation suivante : nous pouvons séparer les effets de transport et de source. Etant donné un triplet  $(\mu, v, h) \in Z(\mu_0, \mu_1)$ , nous pouvons construire un autre triplet  $(\mu', v', h') \in Z(\mu_0, \mu_1)$  où on sépare les contributions de  $v$  et  $h$  en trois parties : d'abord toute la contribution négative de  $h$  (puits), ensuite toute la contribution de  $v$  (transport), enfin toute la contribution positive de  $h$  (source). En plus, ce nouveau triplet satisfait  $\mathcal{B}[\mu', v', h'] \leq \mathcal{B}[\mu, v, h]$ . Nous réduisons donc notre étude de la borne inférieure dans (18) à ce type de triplets, et nous pouvons ensuite démontrer l'identité requise.  $\square$

## 1.4 Equation de transport avec noyau à variation bornée

Dans cette section, nous présentons une autre généralisation des résultats du Théorème 1.5 pour l'étude des solutions de l'équation (1). Nous nous intéressons aux problèmes dans lesquels le champ de vecteurs  $v[\mu]$  dans un point  $x$  est fonction seulement de la valeur de la convolution de  $\mu$  avec un noyau  $w$ , c'est-à-dire

$$v[\mu](x) = V((\mu \star w)(x)), \quad (19)$$

ou  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction Lipschitzienne donnée. L'intérêt de ce choix est que plusieurs modèles de dynamique de foules et de trafic routier s'écrivent sous cette forme, voire des exemples dans [18, 20, 32, 36, 47, 48, 64, 104, 105, 106, 119, 140]. D'ailleurs, c'est ce type d'équations qui a été étudié en premier pour décrire des

phénomènes d'interaction non-locale, comme l'équation de Vlasov (2). Ces équations sont définies par limite de champ moyen des systèmes de particules ; le champ de vecteurs est donné par convolution. Voir plus de détails dans la Section 2.1 suivante.

Quand le noyau de convolution  $w$  est une fonction Lipschitzienne, le champ de vecteurs (19) satisfait les hypothèses du Théorème 1.5, et donc le problème de Cauchy (3) admet une et une seule solution. Si le noyau de convolution est moins régulier, par exemple discontinu en un point, la convolution  $\mu \star w$  n'a de valeur ponctuelle bien définie que quand  $\mu$  est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

En particulier, nous nous intéressons au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho V ((\rho(t) \star w)(x))) = 0 \\ \rho(t = 0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases} \quad (20)$$

où  $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est une densité de probabilité et  $w \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est une fonction à variation bornée. Le but de cette section est de prouver des résultats d'existence et unicité pour ce problème.

Par rapport à l'espace  $\mathbb{R}^d$  de dimension quelconque dans lequel nous avons travaillé dans les sections précédentes, ici nous ne considérons que le cas réel. Le problème étudié dans cette section est en effet un modèle de trafic véhiculaire, normalement uni-dimensionnel. C'est un problème proposé par P. Goatin, experte du domaine. D'ailleurs, nous n'avons pas encore réussi à généraliser à n'importe quelle dimension certaines propriétés utiles des fonctions réelles à variation bornée.

Nous avons deux résultats principaux à ce sujet, présentés dans [R4]. Le premier est un résultat d'existence en temps petit d'une solution de (14).

**Théorème 1.20.** *Soit  $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une densité de probabilité,  $V \in \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction Lipschitzienne et  $w \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction à variation bornée. Alors il existe un temps  $T > 0$  tel que le problème (20) admet une et une seule solution dans l'intervalle  $[0, T]$ .*

Une différence remarquable existe entre ce résultat et le Théorème 1.5 pour les EDP de transport avec vitesse non-locale régulière : ici la solution peut n'exister que pour un intervalle de temps limité. Nous avons donné en [R4] un exemple typique de solution qui cesse d'exister au bout d'un temps donné. Le phénomène est le suivant : la densité de la solution  $\rho(t)$  explose en temps fini, donc la solution sort de l'espace  $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et en conséquence la convolution  $w \star \rho$  et le champ de vecteurs  $V(w \star \rho)$  cessent d'être définis.

Cependant, nous avons prouvé un résultat empêchant l'explosion de la densité et assurant la définition de la solution pour tous temps positifs. C'est le deuxième résultat principal de nos recherches. Les hypothèses choisies ici sont cohérentes avec plusieurs modèles de trafic véhiculaire, voire par exemple [16, 18, 53]. Nous avons notamment une densité initiale bornée par 1 ; le noyau d'interaction  $w$  à support positif représente le fait que chaque véhicule n'est influencé que par les véhicules devant lui, chacun avec une importance décroissante par rapport à la distance ; la vitesse  $V$  non-croissante correspond à la tendance à réduire sa vitesse en présence devant soi de véhicules proches. Ce deuxième résultat est décrit dans le théorème suivant.

**Théorème 1.21.** Soit  $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  une densité de probabilité,  $V \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R}^+)$  une fonction Lipschitzienne non-croissante avec  $V(1) = 0$ ,  $w \in \text{Lip}([0, \eta], \mathbb{R}^+)$  avec  $\eta > 0$  fixé une fonction Lipschitzienne non-croissante satisfaisant  $\int_0^\eta w(x) dx = 1$ . Alors, pour tout temps  $T > 0$ , le problème (20) admet une et une seule solution dans l'intervalle  $[0, T]$ . De plus, la solution satisfait le principe du maximum suivant :

$$\rho(t, x) \leq \text{ess} - \sup \{ \rho_0 \} \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (21)$$

Nos résultats sur ce sujet comprennent aussi un schéma numérique convergent vers la solution de (20) sous les hypothèses du Théorème 1.20. Ce schéma est basé sur un modèle microscopique approchant le modèle macroscopique (20) : la densité  $\rho_0$  est approchée par une mesure (dite empirique) du type  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_0^i}$ , c'est-à-dire par  $N$  véhicules en position  $\{x_0^1, \dots, x_0^N\}$ , chacun avec poids  $\frac{1}{N}$ . La dynamique des véhicules est ensuite donnée par une régularisation de la dynamique de (20), et notamment par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_\ell(x^j - x^i) \right) & \text{for } i = 1, \dots, N, \\ x^i(0) = x_0^i, \end{cases} \quad (22)$$

ou  $w_\ell$  est une fonction Lipschitzienne, régularisant  $w$  comme suit

$$w_\ell(x) := \begin{cases} 0 & \text{when } x < -\frac{\ell}{2} \\ w(0) \frac{\ell+2x}{\ell} & \text{when } x \in [-\frac{\ell}{2}, 0] \\ w(x) & \text{when } x \in [0, \eta] \\ w(\eta) \frac{2\eta+\ell-2x}{\ell} & \text{when } x \in [\eta, \eta + \frac{\ell}{2}] \\ 0 & \text{when } x > \eta + \frac{\ell}{2}. \end{cases} \quad (23)$$

En faisant converger  $\ell$  vers 0 et  $N$  vers l'infini, nous avons la convergence faible de la mesure  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x^i(t)}$  vers la solution  $\rho(t)$  de (20).

C'est d'ailleurs grâce à ce schéma que nous prouvons le Théorème 1.21 aussi, et notamment le principe du maximum (21). En effet, la solution du système (22) a la propriété de garder la distance minimale, comme expliqué dans la proposition suivante.

**Proposition 1.22.** Soit  $\ell > 0$  fixé. Considérons une séquence  $x_0^1 < x_0^2 < \dots < x_0^N$  et la solution  $x(t) = (x^1(t), \dots, x^N(t))$  du système (22). Si  $x_0^i - x_0^{i-1} \geq l > \ell$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ , alors nous avons  $x_i(t) - x_{i-1}(t) \geq l$  pour tout temps  $t > 0$ .

Ce résultat permet de démontrer aisément la condition (21) du Théorème 1.21. En effet, pour  $\rho^0$  donné, nous pouvons toujours trouver une approximation avec  $N$  véhicules avec distance minimale  $l_N := \frac{1}{N|\rho_0|_{L^\infty}}$ . En conséquence, pour tout  $t > 0$  chaque approximation de  $\rho(t)$  préserve la distance minimale, et en particulier pour tout  $N$  et tout intervalle  $(a, b)$  on ne peut pas trouver plus de  $\frac{b-a}{l_N}$  véhicules de poids  $\frac{1}{N}$  dans  $[a, b]$ ; en passant à la limite dans  $N$ , nous avons que  $\int_a^b \rho(t) dx \leq \lim_N \frac{1}{N} \frac{b-a}{l_N} = (b-a)|\rho_0|_{L^\infty}$ , ce qui équivaut à (21).

Les résultats de cette section ont été développés en utilisant une métrique de Wasserstein particulière, dite Wasserstein infinie. Elle est définie par

$$W_\infty(\mu, \nu) = \inf \left\{ \text{ess - sup}_{(x,y) \in \text{supp}(\pi)} |x - y| \mid \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

Ses propriétés ont été étudiées dans [40]. La raison principale pour le choix de  $W_\infty$  vient du fait qu'il est possible d'établir une estimation entre cette distance et les convolutions des densités avec un noyau BV. Nous avons notamment la proposition suivante, dont la preuve se trouve dans [R4].

**Proposition 1.23.** *Soient  $w, w' \in BV([\alpha, \beta], \mathbb{R})$  et  $\rho, \rho' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Les fonctions*

$$f(x) := \int \rho(y)w(x - y) dy, \quad f'(x) := \int \rho'(y)w'(x - y) dy$$

*satisfont l'estimation suivante*

$$\|f - f'\|_{C^0} \leq W_\infty(\rho, \rho') TV(w) \min \{ \|\rho\|_{L^\infty}, \|\rho'\|_{L^\infty} \} + \|\rho'\|_{L^\infty} \|w - w'\|_{L^1}.$$

Le désavantage principal de cette distance est qu'elle ne métrise pas la convergence des mesures. En fait, nous n'avons que l'implication suivante.

**Proposition 1.24.** *La convergence par rapport à la métrique  $W_\infty$  dans  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  implique la convergence des mesures.*

L'envers n'est pas vrai, comme montré facilement par l'exemple suivant :

$$\frac{N-1}{N} \delta_0 + \frac{1}{N} \delta_1 \rightharpoonup \delta_0 \quad \text{mais pour tout } N \text{ il vaut } W_\infty \left( \frac{N-1}{N} \delta_0 + \frac{1}{N} \delta_1, \delta_0 \right) = 1.$$

## 1.5 Quelques perspectives de recherches

Dans cette section, nous décrivons rapidement trois directions de travail intéressantes par rapport aux résultats présentés en Section 1.

Un premier sujet de recherche concerne la description de la dynamique des mesures de probabilité dans un cadre plus général que l'équation (1). Il existe plusieurs dynamiques de mesures intéressantes, mais elles ne sont solution de l'équation (1) pour aucun choix de  $v[\mu]$ . Parmi elles, l'exemple le plus simple est l'équation de la chaleur classique, qui transforme une mesure de Dirac en une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cet exemple, ainsi que plusieurs autres phénomènes de diffusion, a de bonnes propriétés de continuité par rapport à la distance de Wasserstein. Il est donc utile de trouver des définitions de "champ de vecteurs généralisé"  $v[\mu]$  intégrant les phénomènes de diffusion. Notre étude, déjà entamée en collaboration avec B. Piccoli, s'est heurtée à plusieurs problèmes techniques. Nous avons en effet cherché une formulation probabiliste du vecteur  $v[\mu](x)$  comme d'une densité de probabilité dans l'espace tangent  $T_x X$ , mais aucune des formulations trouvées n'a permis de définir une dynamique cohérente avec les phénomènes de diffusion. Notre prochaine stratégie sera d'étudier les vecteurs dans l'espace tangent des plans de transport  $\Pi(\mu, \nu)$ .

Un deuxième sujet de recherche, lié à la Section 1.3 sur les mesures à masse variable, est la définition d'autres généralisations de la métrique de Wasserstein. En particulier, la distance de Wasserstein généralisée n'est pas particulièrement adaptée aux phénomènes modélisant la croissance d'une mesure, voire [102] pour la croissance des tumeurs. Par exemple, la métrique de Wasserstein généralisée  $W_p^{a,b}(\mu, \mu + \nu)$  vaut  $|\nu|$  pour toute mesure  $\nu$  positive, ne faisant pas de différence entre une mesure  $\nu$  proche de  $\mu$  (typique d'un phénomène de croissance) et une autre tout à fait éloignée.

Une nouvelle métrique, plus adaptée à ces phénomènes, permettrait d'ailleurs de généraliser les résultats de Jordan-Kinderlehrer-Otto [90], en écrivant les processus de croissance comme des flots gradients par rapport à cette distance. Cela élargirait remarquablement l'applicabilité de la riche théorie des flots gradient, voire [7]. De nombreux travaux récents se focalisent sur ce sujet, voire notamment [42, 96, 99].

Un dernier sujet de recherche, continuant les résultats de la Section 1.4, est l'étude des phénomènes d'explosion de la densité en temps fini. Pour l'instant, nous savons que la densité est bornée sous les hypothèses du Théorème 1.5, alors qu'elle peut exploser sous les hypothèses du Théorème 1.20. Nous cherchons justement des hypothèses plus fortes permettant de distinguer ces deux phénomènes. De plus, nous recherchons aussi les conditions qui assurent la non-croissance de la densité (Théorème 1.21 avec son principe du maximum) et celles qui permettent une croissance jusqu'à un certain seuil.

Au-delà de leur intérêt formel, ces résultats permettraient aussi d'établir des actions simples transformant un système avec explosion de la densité en un système sans explosion, ou changeant la densité maximale atteignable. En particulier, ces méthodes sont utiles dans la commande des foules, pour empêcher la formation de zones à forte densité qui portent à la panique et à la mort par suffocation, voire [82]. Les nouvelles méthodologies concernant le problème de la commande des foules sont présentées dans la Section 2 suivante.



## 2 Commande des foules

L'étude du comportement collectif des foules a suscité un très grand intérêt de la part des communautés scientifiques, tout autant pour ses défis théoriques que pour ses nombreuses applications. Il est maintenant bien connu que certaines règles d'interaction entre agents peuvent expliquer la formation de structures macroscopiques (les "patterns"), telles que les vols d'oiseaux ou les lignes de piétons. C'est le phénomène dit de l'auto-organisation ou du comportement émergent. La connaissance de ces phénomènes peut être utilisée dans la construction des infrastructures pour piétons, afin de résoudre des problèmes d'évacuation par exemple. En effet, les piétons en situation de panique tendent à suivre les personnes devant eux, en formant des lignes. La création du pattern "follow-the-leader" en est renforcée, voire par exemple [82]. Par contre, certaines configurations à haute densité peuvent émerger aussi, ce qui est un phénomène à éviter.

Au-delà de la description des comportements de foules, la communauté scientifique commence maintenant à s'intéresser à leur commande : comment un agent extérieur peut-il influencer une foule ? Une action extérieure peut faciliter la création des patterns, ou empêcher leur formation. **C'est ce problème de la commande des foules, que je traite dans cette section.** Pour la commande de certains modèles spécifiques, comme ceux utilisés dans l'automatique en réseau [27, 66, 67, 97, 101] ou pour le trafic routier [31, 49, 79], un nombre important de résultats est déjà disponible. Cependant, le but de mes recherches sur la commande des foules est celui d'établir des résultats de nature plus générale.

De nombreux modèles pour les foules sont souvent écrits dans le formalisme des équations de transport avec vitesses non-locales, décrites en Section 1. Le problème de la commande des foules se traduit donc en un problème de commande de ces équations. Ce sujet aussi a reçu un vif intérêt de la part de la communauté mathématique : plusieurs résultats sont disponibles pour les équations linéaires [125, 129], pour les systèmes de Vlasov-Poisson [71, 72], pour certains cas spécifiques avec diffusion [95] et pour des modèles stochastiques [19, 34]. Ma contribution de Section 2.2 est un premier exemple de commande d'une équation de transport avec vitesse non-locale, où la commande est localisée dans un sous-ensemble variable dans le temps.

Dans ce domaine, je m'intéresse à des stratégies de commande "sparses". De façon générale, la sparsité indique le fait d'agir sur un petit nombre d'axes dans un système de grande dimension. La sparsité a été étudiée dans des cadres très différents : traitement du signal, robotique, analyse et commande des EDP, etc... Voir par exemple [29, 37, 58, 83, 136, 147, 148]. Dans le cadre de la commande des foules, une commande est dite sparse si elle intervient sur un petit sous-ensemble de l'espace des configurations. Par exemple, la commande effectuée par les leaders d'une foule est sparse car elle se focalise sur peu d'agents. Dans d'autres exemples, la commande définie sur un petit domaine  $\omega(t)$  de l'espace des configurations est sparse elle-aussi.

La sparsité est une propriété-clé pour les applications, car elle modélise le fait que les systèmes de commande d'une foule peuvent communiquer avec peu d'agents à la fois, ou avec ceux qui sont dans une partie spécifique de l'espace. D'ailleurs, si la commande pouvait agir sur tous les agents à tout instant, il n'y aurait pas besoin

de techniques spécifiques pour la commande des foules. La sparsité est aussi intéressante pour la simulation numérique de ces systèmes, car elle implique une réduction du nombre des variables et du temps de calcul.

La structure de cette section est la suivante. Je rappelle d'abord en Section 2.1 la définition de la limite de champ moyen. Elle permet de passer d'un système microscopique, notamment décrit par une équation aux dérivées ordinaires en dimension finie, à la dynamique de la densité de particules, donnée par une équation aux dérivées partielles. La définition de cette limite a un impact décisif sur la possibilité de transformer une stratégie de commande pour le système de particules en une stratégie pour la dynamique de la densité. En particulier, je montre que les seules commandes du système en dimension finie pour lesquelles il existe une limite de champ moyen sont les commandes dépendantes de l'état et pas de l'index des particules. Cette section ne contient pas de résultats nouveaux, mais plutôt une vision personnelle qui m'a permis de mieux comprendre la nature du problème de la commande des foules.

En Section 2.2, j'expose mes résultats de commande du modèle de champ moyen de Cucker et Smale, décrivant l'alignement des vols d'oiseaux. Je rappelle la définition du modèle microscopique de Cucker et Smale [50], décrivant l'alignement des oiseaux, et sa limite de champ moyen. Aussi bien pour le modèle original que pour sa limite de champ moyen, il est possible de prouver l'alignement du vol seulement avec certains paramètres et/ou certaines configurations initiales. Au contraire, il existe des exemples de non-alignement ; dans ce cas, il est intéressant d'étudier comment une commande extérieure permet de faire converger la population vers une configuration alignée. Le problème pour le modèle en dimension finie a été résolu par mes collaborateurs dans [33]. Je me focalise donc sur la commande du modèle de champ moyen vers l'alignement. Je définis une stratégie de commande qui envoie toute donnée initiale dans une configuration d'alignement.

La Section 2.3 décrit d'autres résultats de commande pour les équations de transport avec vitesses non-locales, dans un cadre légèrement différent : la population (décrite par sa densité) est en interaction avec un certain nombre de leaders (décrits par leurs positions) qui la conduisent vers une configuration souhaitée. L'équation pour la population ne présente pas de commande, mais elle est couplée avec un système de commande en dimension finie pour les leaders. J'étudie certains problèmes de commande optimale pour ces systèmes couplés : je démontre notamment qu'ils admettent une solution, que cette solution peut être calculée par discrétisation de la population, et qu'il est possible d'écrire une généralisation du Principe de Maximum de Pontryagin. Il est intéressant de montrer que ce principe est naturellement écrit comme un problème Hamiltonien dans le formalisme des gradients de Wasserstein, voire [7].

Les travaux présentés dans cette section ont été obtenus dans le cadre de ma collaboration avec B. Piccoli, E. Trélat et M. Fornasier, commencée en 2012. La collaboration s'est ensuite étendue aux étudiants de M. Fornasier, M. Bongini et F. Solombrino, soutenue par un financement PHC PROCOPE France-Allemagne pour la période 2014-2015. Les publications [R5],[R6],[R7] en sont les résultats. Pour cette raison, dans le reste de cette section, une forme verbale plurielle a été préférée.

## 2.1 La limite de champ moyen en présence de commandes

Dans cette section, nous rappelons brièvement la définition de la limite de champ moyen, avec ses hypothèses, et nous montrons quelles contraintes elle pose sur la possibilité de calculer une limite de champ moyen en présence d'une commande. La présentation de la limite de champs moyen est assez proche de Spohn [135] et Villani [143]. En particulier, nous ne traitons pas la limite de champs moyen en termes probabilistes, mais plutôt comme limite macroscopique de modèles microscopiques.

Considérons d'abord un modèle physique décrivant l'interaction entre  $N$  particules, que nous appelons modèle microscopique. Chaque particule est décrite par sa position dans l'espace des configurations  $x_i \in \mathbb{R}^d$ , et donc le système est entièrement décrit par le vecteur des positions  $\{x_1, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^{dN}$ . Nous supposons que le modèle microscopique donne une évolution du système dans le temps : la trajectoire du système à partir d'une configuration initiale  $\{x_1(0), \dots, x_N(0)\}$  est décrite par le vecteur  $\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$  pour chaque temps  $t \in [0, T]$  avec  $T$  donné.

Si les particules sont indistinguables dans le modèle microscopique, alors cela veut dire que pour tout choix d'index  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  la trajectoire

$$\{x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_j(t), \dots, x_N(t)\}$$

avec donnée initiale  $\{x_1(0), \dots, x_i(0), \dots, x_j(0), \dots, x_N(0)\}$  et la trajectoire

$$\{x'_1(t), \dots, x'_i(t), \dots, x'_j(t), \dots, x'_N(t)\}$$

avec donnée initiale permutée  $\{x_1(0), \dots, x_j(0), \dots, x_i(0), \dots, x_N(0)\}$  sont données par la permutation de  $i$  et  $j$ , c'est-à-dire que pour tout  $t \in [0, T]$  il vaut  $x_k(t) = x'_k(t)$  pour  $k \neq i, j$ , et  $x'_i(t) = x'_j(t)$ ,  $x'_j(t) = x'_i(t)$ .

Pour cette raison, il est intéressant de définir la **mesure empirique** décrivant la trajectoire du système, donnée par

$$\mu_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}.$$

C'est une mesure de probabilité sur l'espace des configurations, donc un élément de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . Observons en particulier que, sous l'hypothèse d'indistinguabilité, la permutation des indexs ne change pas la définition de mesure empirique. L'aspect le plus remarquable de cette définition est que l'espace des configurations de  $N$  particules est  $\mathbb{R}^{dN}$ , dépendant donc de  $N$ , alors que l'espace des mesures empiriques est  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $N$ .

Considérons maintenant une famille de modèles microscopiques, indexés par  $N$ , tous avec indistinguabilité des particules. Un exemple typique est donné par les systèmes dynamiques dépendant des différences des configurations seulement, c'est-à-dire de la forme

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j - x_i), \quad (24)$$

pour deux fonctions  $f, g \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  données. Nous nous posons la question suivante : existe-t-il un modèle "limite" pour  $N$  qui tend vers l'infini ? Nous avons la définition suivante.

**Définition 2.1.** Une famille de modèles microscopiques pour  $N$  particules converge vers un modèle de champ moyen (à définir) si pour toute suite de mesures empiriques  $\mu_N(0)$  indexées par  $N$  satisfaisant

$$\mu_N(0) \rightharpoonup \mu(0), \quad (25)$$

il vaut aussi

$$\mu_N(t) \rightharpoonup \mu(t) \quad (26)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où chaque mesure  $\mu_N(t)$  est uniquement déterminée par le modèle microscopique à  $N$  particule et  $\mu(t)$  est donnée par le modèle de champ moyen.

Rappelons que la distance de Wasserstein  $W_p$  métrise la convergence de mesures dans le sous-espace  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$  défini par (8), voire Théorème 1.4. Pour simplifier la discussion, nous travaillerons souvent dans l'espace  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  des mesures à support compact, et même dans l'espace  $\mathcal{P}(B(0, R))$  des mesures à support dans le même compact  $B(0, R)$ . Cela permet de vérifier la convergence des mesures en vérifiant la convergence dans la métrique de Wasserstein seulement.

La limite de champ moyen a d'abord été définie pour la convergence vers des mesures  $\mu$  qui sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. En particulier, les modèles de champ moyen sont souvent donnés par des EDP, comme par exemple dans la formule suivante :

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot ((f + G[\mu])\mu) = 0, \quad (27)$$

avec  $G[\mu](x, v) := \int g(y-x) d\mu(y, w)$  champ de vitesse donné par convolution. Mais cette équation est clairement une équation de transport avec vitesse non-locale, qui permet de définir la dynamique pour toute mesure initiale  $\mu_0 \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  et non seulement pour les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, voire Section 1.1

Nous allons profiter de ce plongement pour prouver facilement que la limite de champ moyen de (24) est bien (27). Considérons une mesure empirique  $\mu_N(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(0)}$  donnée, et dénotons avec  $\mu_N(t)$  la mesure empirique donnée par la solution du modèle microscopique (24). D'un côté, nous avons

$$\mu_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)} \quad (28)$$

avec  $\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$  unique solution de (24) avec donnée initiale  $\{x_1(0), \dots, x_N(0)\}$ . De l'autre côté, nous savons que la solution de (27) à partir de la mesure  $\mu_N(0)$  est unique. Nous vérifions donc que  $\mu_N(t)$  est solution faible de (27). Nous observons d'abord que la formulation (4) de solution faible de (27) peut être remplacée par la condition suivante, voire [7, Equation (8.1.4)] : pour tout  $\phi \in C_c^\infty(X)$  il vaut

$$\partial_t \int \phi(x) d\mu_N(t) = \int \nabla \phi(x) \cdot (f + G[\mu]) d\mu_N(t).$$

En remplaçant la mesure  $\mu_N(t)$  donnée par (28) et en évaluant les intégrales, nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \partial_t \phi(x_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla \phi(x_i(t)) \cdot (f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N g(x_j(t) - x_i(t))).$$

En observant que  $\partial_t \phi(x_i(t)) = \nabla \phi(x_i(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$  et en rappelant que  $x_i$  satisfait (24), nous avons l'égalité. En conséquence,  $\mu_N$  est l'unique solution de (27).

La conséquence fondamentale est que la limite (26) découle de la convergence de la donnée initiale (25) si le modèle macroscopique a la propriété de la continuité par rapport à la donnée initiale. Ce résultat a notamment été prouvé pour toute équation de transport avec vitesse non-locale satisfaisant les hypothèses **(H)** en Section 1.1.

Nous nous intéressons maintenant au passage d'un système microscopique à un système macroscopique en présence de commande. Dans ce cadre, ce passage peut se faire de deux façons, décrites dans le schéma en Figure 1.

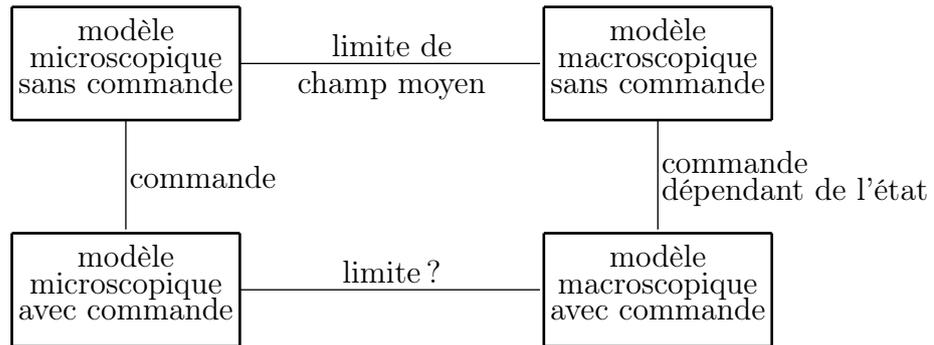


FIGURE 1 – Passage d'un modèle microscopique à un modèle macroscopique en présence de commande.

Une première façon est de passer du modèle microscopique au modèle macroscopique sans commande par la limite de champ moyen et de rajouter ensuite la commande directement dans le modèle macroscopique. Cette première voie est bien définie et le modèle résultant est un modèle de commande d'EDP de transport. Un exemple de ce type sera décrit en détail en Section 2.2. Cependant, cette approche ne permet pas d'utiliser les éventuels résultats de commande pour le système microscopique, car la commande ne passe pas à la limite.

Une deuxième façon est celle d'appliquer une commande au problème microscopique et ensuite de trouver une sorte de limite pour le modèle microscopique avec commande. C'est cette deuxième voie que nous discutons en détail, car elle est la plus intéressante pour traduire les nombreux résultats de commande en dimension finie (pour les modèles microscopiques) à la commande des EDP de transport.

La première observation est cruciale : *étant donné un modèle microscopique avec particules indistinguables, le rajout d'une commande ne doit pas faire perdre cette propriété*. En particulier, aucune commande ne peut se focaliser sur un agent donné. Par exemple, pour le modèle microscopique (24), nous ne pouvons pas avoir une dynamique du type  $\dot{x}_i = \dots + u_i$ , qui est par contre typique dans les modèles de commande classiques, où la commande est appliquée à un élément précis du système. Par contre, il est tout à fait possible de rajouter une commande  $u$  ne dépendant que des positions de chaque agent. En reprenant le modèle microscopique (24), nous pouvons écrire  $\dot{x}_i = \dots + u(t, x_i)$ , où  $u$  est une fonction ne dépendant pas des agents. Nous appelons cette commande une “commande extérieure”, car elle ne dépend pas de la configuration globale de la foule. Une autre possibilité est celle de rajouter un terme invariant par permutations, par exemple  $\dot{x}_i = \dots + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w(t, x_j - x_i)$ . Nous appelons cette commande une “commande d’interaction”, car elle dépend des interactions entre agents. Dans les deux cas, pour tout choix de  $u, w \in L^\infty([0, T], \text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ , la solution du problème de commande

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u(t, x_i) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (g(x_j - x_i) + w(t, x_j - x_i)), \quad (29)$$

est bien définie pour toute condition initiale. En conséquence, pour chaque système de  $N$  particules, nous pouvons définir la mesure empirique  $\mu_N^{u,w}(t)$ , qui dépend de  $u, w$ . Nous pouvons donc considérer le modèle macroscopique

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot ((f + u + G[\mu] + W[\mu])\mu) = 0, \quad (30)$$

avec  $W[\mu](t, x) := \int w(t, y - x) d\mu(y)$ . Il est encore facile de démontrer par plongement que les mesures empiriques  $\mu_N^{u,w}(t)$  sont solutions de (30) et que nous avons continuité de la solution de (30) par rapport à la donnée initiale. Les preuves sont complètement identiques à celles de la Section 1.1, où le champ de vecteurs  $\phi_t$  est remplacé par un champ de vecteurs dépendant du temps.

Si l’existence des solutions est bien posée pour le système (30), il faut observer que l’ensemble des commandes admissibles  $L^\infty([0, T], \text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$  est en effet l’ensemble des commandes par retour d’état (variables dans le temps), contrairement à l’espace plus classique  $L^1([0, T], U)$  pour un ensemble  $U \subset \mathbb{R}^k$  où  $k$  est le nombre de commandes. L’espace  $L^\infty([0, T], \text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$  est beaucoup plus contraignant, car nous avons besoin d’une borne sur la constante de Lipschitz pour vérifier des propriétés de convergence des commandes. Par exemple, dans [69] les auteurs introduisent l’espace des commandes  $F_\ell([0, T])$  pour une fonction  $\ell \in L^\infty([0, T])$  donnée ; celles-ci sont toutes les fonctions  $u$  de commande satisfaisant  $|u(t, 0)| + \text{Lip}(u(t, \cdot)) \leq \ell(t)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

En revenant à la discussion du schéma en Figure 1, il est intéressant d’observer que les deux parcours portent donc au même problème de commande d’EDP de transport, avec une contrainte de régularité importante sur la commande : elle n’est plus une fonction du temps seulement, mais elle est toujours un champ de vecteurs Lipschitzien dépendant du temps. Cela implique aussi que certains résultats de commande pour les systèmes microscopiques de la forme (29) peuvent être traduits en résultats de commande pour l’EDP de transport.

Dans la Section 2.2 suivante, nous présenterons un résultat dans cet esprit : étant donné le modèle microscopique de Cucker et Smale pour l'alignement des vols d'oiseaux, nous trouverons une stratégie de commande pour l'EDP de transport associée. Elle se base sur l'idée de construire une commande extérieure adaptée au problème microscopique, mais suffisamment régulière pour être définie dans  $\text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Il ne sera pas surprenant que l'une des difficultés majeures, liées à la stratégie de commande choisie, réside justement dans le fait de s'assurer que la commande reste Lipschitzienne pour tout temps.

## 2.2 Commande du modèle de champ moyen de Cucker et Smale

Dans cette section, nous exposons nos résultats sur la commande du modèle de champ moyen de Cucker et Smale.

Nous présentons d'abord le modèle original de Cucker et Smale, ainsi que sa limite de champ moyen. Dans le modèle de Cucker et Smale en dimension finie, nous considérons  $N$  agents en interaction dans l'espace  $\mathbb{R}^d$ . Nous représentons avec  $(x_i, v_i)$  les variables position-vitesse de chaque agent, avec  $i = 1, \dots, N$ . Le modèle de Cucker et Smale sans commande s'écrit dans la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(\|x_j(t) - x_i(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (31)$$

où  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction positive non-croissante, qui modélise l'influence d'un individu sur l'autre (dépendant de la distance entre eux seulement). Chaque agent cherche donc à aligner sa vitesse sur celle de ses voisins.

Ce modèle, introduit dans [50] avec un choix spécifique de la fonction  $\phi$ , est remarquable car il montre l'habileté d'une foule à s'auto-organiser. En effet, si l'influence de chaque agent sur les autres est suffisamment grande ( $\phi$  ne décroissant pas trop rapidement), la vitesse de tous les agents converge vers la valeur moyenne  $\bar{v}$ . Nous nous intéressons donc à la condition de flocking définie comme suit.

**Définition 2.2.** Soit  $(x_1(t), v_1(t), \dots, x_N(t), v_N(t))$  une solution de (31), et  $(\bar{x}(t), \bar{v})$  son barycentre à chaque temps dans les variables position et vitesse<sup>3</sup>. Nous disons que cette solution converge vers le flocking si ces deux conditions sont satisfaites :

- il existe  $X^M$  tel que  $\|x_i(t) - \bar{x}(t)\| \leq X^M$  pour tout  $i$  et  $t \geq 0$  ;
- il vaut  $\Lambda(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |v_i(t) - \bar{v}|^2 \rightarrow 0$ .

Selon la condition initiale, nous avons des cas de flocking ou de non-flocking. Des conditions suffisantes pour le flocking se trouvent notamment dans [50, 76].

La limite de champ moyen pour ce modèle a été calculée dans [36, 76, 77], voire aussi [35]. Sa dynamique est donnée par l'équation de transport suivante, que nous appelons *équation de champ moyen de Cucker et Smale* :

$$\boxed{\partial_t \mu + \langle v, \text{grad}_x \mu \rangle + \text{div}_v (\xi[\mu] \mu) = 0.} \quad (32)$$

3. Il est bien connu que  $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$  et  $\dot{\bar{v}} = 0$  pour ce modèle, voire [50].

Dans cette équation,  $\mu(t)$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , et  $\xi[\mu]$  est le noyau d'interaction défini par

$$\xi[\mu](x, v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(\|x - y\|)(w - v) d\mu(y, w), \quad (33)$$

où  $\phi$  est la même fonction que dans (31). En considérant le modèle original comme le cas d'une mesure composée de masses de Dirac, nous pouvons plonger la dynamique (31) dans l'espace des mesures, voire Section 2.1. Nous avons donc le résultat suivant.

**Proposition 2.3.** *Soit  $\mu^0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  de la forme  $\mu^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i^0, v_i^0)}$ , pour quelques  $(x_i^0, v_i^0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Alors, la seule solution de (32) avec  $\mu(0) = \mu^0$  est donnée par*

$$\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i(t), v_i(t))},$$

où  $(x_i(t), v_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$  est la solution de (31) avec  $x_i(0) = x_i^0$  et  $v_i(0) = v_i^0$ .

Dans ce cadre, la définition de flocking est exprimée en termes du support de la mesure  $\mu$ .

**Définition 2.4.** *Soit  $\mu \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  une solution de (32), et  $(\bar{x}(t), \bar{v}(t))$  le barycentre<sup>4</sup> de  $\mu(t)$ . Nous disons que  $\mu$  converge vers le flocking si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- il existe  $X^M > 0$  tel que  $\text{supp}(\mu(t)) \subset B(\bar{x}(t), X^M)$  pour tout  $t > 0$  ;
- $\Lambda(t) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - \bar{v}|^2 d\mu(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow +\infty$ .

Plusieurs résultats connus pour le modèle microscopique de Cucker et Smale (31) peuvent être généralisés aux solutions de l'équation (32). En particulier, nous présentons une inégalité différentielle pour l'évolution du support de  $\mu$ , qui donne aussi des conditions suffisantes pour la convergence vers flocking de la solution de (32).

**Proposition 2.5.** *Etant donné une solution  $\mu$  de (32), nous définissons pour tout temps  $t$  la taille du support dans les variables position et vitesse de la façon suivante :*

$$\begin{cases} X(t) &= \inf \{ X \geq 0 \mid \text{supp}(\mu(t)) \subset B(\bar{x}(t), X) \times \mathbb{R}^d \}, \\ V(t) &= \inf \{ V \geq 0 \mid \text{supp}(\mu(t)) \subset \mathbb{R}^d \times B(\bar{v}, V) \}, \end{cases} \quad (34)$$

Alors, les fonctions  $X(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  sont absolument continues et elle satisfont

$$\dot{X}(t) \leq V(t), \quad \dot{V}(t) \leq -\phi(2X(t))V(t), \quad (35)$$

pour presque tout  $t \geq 0$ .

En conséquence, si

$$V(0) < \int_{X(0)}^{+\infty} \phi(2x) dx, \quad (36)$$

alors il existe  $X_M > 0$  tel que

$$\text{supp}(\mu(t)) \subset B(\bar{x}^0 + t\bar{v}, X_M) \times B(\bar{v}, V^0 e^{-\phi(2X_M)t}), \quad (37)$$

pour tout  $t \geq 0$ . En particulier,  $\mu(t)$  converge vers le flocking.

4. Nous avons  $\bar{x} = \int x d\mu(x, v)$  et  $\bar{v} = \int v d\mu(x, v)$ .

Ces résultats ont été prouvés dans [36, 76].

Nous rajoutons maintenant une commande, tout autant pour le modèle de Cucker et Smale que pour sa limite de champ moyen. Comme déjà expliqué en Section 2.1, la façon d'introduire la commande dans (31) est cruciale pour que la limite de champ moyen puisse être appliquée. En particulier, nous devons introduire une commande  $u$ , définie sur l'espace des configurations et non pas sur un agent  $i$  spécifique.

Nous considérons donc le système de commande suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(\|x_j(t) - x_i(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) + u(t, x_i(t), v_i(t)), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (38)$$

où  $u$  est la même fonction pour tout  $i = 1, \dots, N$ . La bonne définition de la solution de (38) nécessite la Lipschitzianité (globale) de  $u$  pour tout temps  $t$ . Sous cette hypothèse, nous avons la bonne définition de la limite de champ moyen pour ce système. L'équation résultante est

$$\partial_t \mu + \langle v, \text{grad}_x \mu \rangle + \text{div}_v ((\xi[\mu] + \chi_\omega u) \mu) = 0, \quad (39)$$

où  $\omega$  est le support de  $u$ . La preuve est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.6.** *Soit  $u \in L^\infty([0, T], \text{Lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$  une commande donnée, avec support  $\omega(t)$  borné et mesurable de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Soit  $\mu^0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  de la forme  $\mu^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i^0, v_i^0)}$ , avec  $(x_i^0, v_i^0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Alors la seule solution de (39) avec  $\mu(0) = \mu^0$  et la commande  $\chi_\omega u$  est donnée par*

$$\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i(t), v_i(t))},$$

où  $(x_i(t), v_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$  est la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(\|x_j(t) - x_i(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) + \chi_{\omega(t)}(x_i(t), v_i(t))u(t, x_i(t), v_i(t)), \end{cases}$$

avec  $x_i(0) = x_i^0$  et  $v_i(0) = v_i^0$ .

Nous décrivons maintenant les contraintes que nous imposons sur la commande de l'équation de champ moyen de Cucker et Smale (39). Comme déjà décrit en introduction, il est intéressant d'utiliser des commandes sparses pour les modèles de foules. Dans notre cas, nous allons donc imposer que la commande n'agisse que sur une petite portion  $c$  de la population à chaque instant, et que son action soit bornée. Nous considérons donc la classe des commandes  $\chi_\omega u$ , où  $u \in L^\infty([0, T], \text{Lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$  et  $\omega(t)$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  pour tout temps  $t$ , satisfaisant les contraintes suivantes :

$$\|u(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad (40)$$

pour presque tout  $t$  et

$$\mu(t)(\omega(t)) := \int_{\omega(t)} d\mu(t)(x, v) \leq c, \quad (41)$$

pour tout  $t$ .

La contrainte (41) est formellement difficile à gérer pour des mesures  $\mu$  quelconque. Par exemple,  $\mu$  pourrait contenir une masse de Dirac de valeur supérieure à  $c$ , ce qui empêcherait toute action dans un voisinage. Pour cette raison, nous nous bornons au cas de mesures dans  $\mathcal{P}_c^{ac}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , qui donnent aussi des propriétés utiles de continuité de  $\mu(t)(\omega(t))$  en fonction du temps.

Le but principal de nos recherches à ce sujet est le résultat suivant de commande vers le flocking.

**Théorème 2.7.** *Soit  $c > 0$  donné. Pour tout  $\mu^0 \in \mathcal{P}_c^{ac}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , il existe une commande  $\chi_\omega u \in L^\infty([0, +\infty), \text{Lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ , satisfaisant les contraintes (40) et (41), telle que la solution unique  $\mu \in C(\mathbb{R}; \mathcal{P}_c^{ac}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  de (39) avec  $\mu(0) = \mu^0$  converge vers le flocking pour  $t \rightarrow +\infty$ .*

La preuve est constructive, car nous définissons explicitement une commande envoyant la donnée initiale au flocking. La construction et la preuve étant assez longues et techniques, nous n'en donnons ici qu'une idée. Pour la preuve complète, voire [R5].

*Idée de la preuve.* La première observation est qu'il est possible d'étudier le problème dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  composante par composante. En effet, pour chaque composante  $i = 1, \dots, d$  nous appliquons une commande pour réduire le support dans la variable  $v_i$ . La fonction  $\phi$  étant non-négative, le support dans cette composante n'augmente pas, même en commandant les autres variables.

Considérons donc le seul problème en dimension  $d = 1$ . Etant donné  $\mu^0 = f^0 dx dv \in \mathcal{P}_c^{ac}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  la donnée initiale, nous définissons  $(\bar{x}^0, \bar{v}^0)$  son barycentre et  $X^0, V^0$  les tailles du support, comme dans (34). Nous savons que le champ de vecteurs  $\xi[\mu^0](x, v)$  pointe vers  $\bar{v}^0$  pour tout  $v$  sur le bord de l'intervalle. En termes plus précis,  $\xi[\mu^0](x, v) \cdot (v - \bar{v}^0) < 0$  pour  $|v - \bar{v}^0| = V^0$ . Une étude plus fine nous permet de calculer une quantité  $\alpha^0$  telle que la condition  $\xi[\mu^0](x, v) \cdot (v - \bar{v}^0) < 0$  est valable pour tout  $v$  satisfaisant  $|v - \bar{v}^0| > \alpha^0$ . Nous définissons aussi  $\beta^0 = \frac{1}{3}(V^0 - \bar{v}^0)$ .

Nous divisons le support de  $\mu_0$  en bandes dans la variable position, c'est-à-dire en  $n = \lceil \frac{2}{c} \rceil$  ensembles de la forme  $\Omega_i := [x_{[i]}, x_{[i+1]}] \times \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , chacun contenant une masse  $\frac{c}{2}$ . Comme première étape, nous choisissons l'ensemble de commande  $\omega(t)$  contenant  $\Omega_1 \cap \{|v - \bar{v}^0| > \alpha^0\}$  et nous appliquons une commande  $u$  sur  $\Omega_1 \cap \{|v - \bar{v}^0| > \alpha^0 + \beta^0\}$  de valeur  $-\frac{v - \bar{v}^0}{|v - \bar{v}^0|}$  pour un temps  $[0, \tau]$  avec  $\tau$  à choisir ; cela permet de réduire la taille du support dans la variable vitesse dans l'ensemble  $\Omega_1$ . En dehors de  $\Omega_1$ , nous définissons  $u = -\psi_{[1]} \frac{v - \bar{v}^0}{|v - \bar{v}^0|}$  pour avoir une fonction Lipschitzienne, avec  $\psi_{[i]}$  décrite en Figure 2.

Comme deuxième étape, nous appliquons la même commande dans l'intervalle  $\Omega_2$  pour le temps  $\tau$ , et ainsi de suite. Un choix précis du temps  $\tau$  permet de réduire globalement la taille du support dans la variable vitesse d'une quantité  $V^0$  à une quantité  $V^1 \leq V^0 - \frac{\tau}{n}$ .

En répétant la même stratégie, nous réduisons la taille du support dans la variable vitesse à une valeur  $\eta > 0$  à choisir. D'autres estimations précises montrent que la taille du support dans la variable position est bornée par  $X^0 + (V^0)^2 \lceil \frac{2}{c} \rceil$ . En choisissant  $\eta$  suffisamment petite, nous retrouvons une mesure avec une taille du support satisfaisant la condition (36) de la Proposition 2.5, assurant que la mesure converge vers le flocking.  $\square$

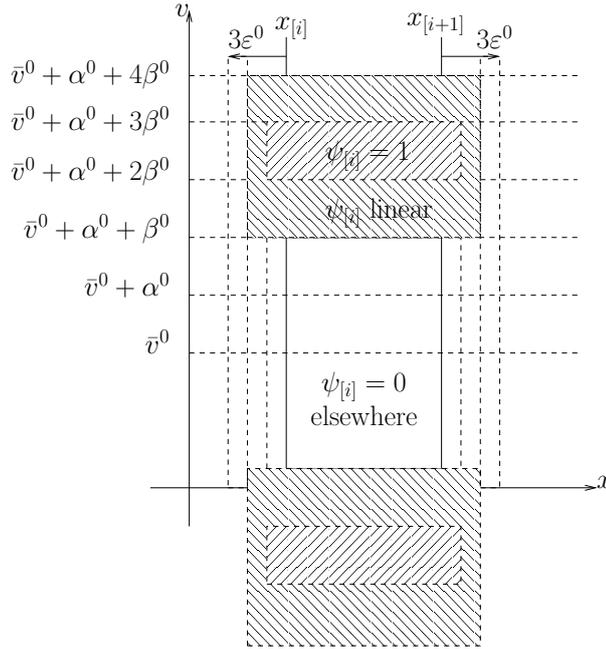


FIGURE 2 – Définition de  $\psi_{[i]}$ .

Le problème de commande de la limite de champ moyen de Cucker et Smale peut s'étudier avec des contraintes différentes, par exemple en remplaçant la contrainte (41) par une contrainte sur la mesure de Lebesgue de  $\omega$  du type  $\int_{\omega(t)} dx dv < c$ . Cette contrainte est une autre forme de sparsité, par rapport à l'espace des configurations et pas par rapport à la population. Nous avons prouvé qu'une stratégie de commande, légèrement plus simple que la précédente, permet d'envoyer toute donnée initiale au flocking. Voir plus de détails en Section 4.5 de [R5].

La même construction peut se généraliser à une large classe de systèmes, dits collaboratifs ou monotones (voire [8, 134]), dans lesquels les forces d'interaction sont purement attractives. C'est un sujet de travail en cours.

### 2.3 Commande optimale de foules par leaders

Dans cette section, nous présentons nos résultats de commande optimale pour un système représentant une foule guidée par un petit nombre de leaders. Nous définissons d'abord le modèle microscopique, avec le coût associé ; ensuite, nous montrons que le modèle admet une limite de champ moyen, qui est un système couplant une équation aux dérivées ordinaires pour les leaders et une EDP de transport avec vitesse non-locale pour la foule. Après l'étude de la limite de la dynamique, nous prouvons que le problème de commande optimale admet une solution, en utilisant la notion de  $\Gamma$ -limite. Enfin, nous démontrons que cette commande optimale peut être calculée grâce à une généralisation du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP dans la suite, voire [122]).

Nous commençons par décrire le modèle microscopique pour une foule en inter-

action avec des leaders. Plusieurs modèles décrivent les interactions entre leaders et followers dans une foule, voire par exemple [4, 5, 59]. Dans notre cas, les agents vivent dans un espace  $\mathbb{R}^d$ , et nous utilisons les variables  $x_i$  avec  $i = 1, \dots, N$  pour les positions des  $N$  agents de la foule et les variables  $y_k$  avec  $k = 1, \dots, m$  pour les positions des  $m$  leaders. Nous considérons la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(y_k - x_j) + f_k(y) + B_k u, & k = 1, \dots, m, \\ \dot{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) + g(y)(x_i), & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (42)$$

où l'interaction entre agents est décrite par un noyau  $K$  ; il existe éventuellement des champs de vecteurs  $f_k$  pour les leaders, et un champ de vecteurs  $g$  pour les autres agents, ne dépendant que des positions des leaders ; enfin, la commande  $u$  est à valeurs dans un sous-ensemble  $U$  compact et convexe de  $\mathbb{R}^D$  et elle agit linéairement sur chaque leader  $y_k$ , avec une action donnée par la matrice constante  $B_k$  de dimension  $d \times D$ . Nous considérons pour cette dynamique un coût à minimiser de la forme suivante :

$$F_N(u) := \int_0^T [L(y(t), \mu_N(t)) + \gamma(u(t))] dt, \quad (43)$$

avec le temps final  $T > 0$  fixé, la mesure  $\mu_N(t)(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}$  étant la mesure empirique pour les variables  $\{x_1, \dots, x_N\}$  et  $\gamma$  une fonctionnelle strictement convexe. Nous indiquons avec  $(\mathbf{P}_N)$  le problème de minimisation de (43) contraint à la dynamique (42).

Nous rappelons ici toutes les hypothèses de régularité sur les éléments du problème  $(\mathbf{P}_N)$  que nous assumons dans notre étude :

### HYPOTHÈSES **(H)**

**(K)** La fonction  $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  est impaire et à croissance sub-linéaire, c'est-à-dire qu'il existe  $C_K > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  il vaut

$$\|K(x)\| < C_K(1 + \|x\|).$$

**(L)** La fonction  $L : \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  est

$$L(y, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \ell(y, x, \int \omega \mu) d\mu(x),$$

avec  $\ell \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  et  $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ .

**(G)** La fonction  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{dm}; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$  satisfait pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et tout  $y \in \mathbb{R}^{dm}$

$$g(y)(x) \cdot x \leq G_1 \|x\|^2 + G_2 \max_{l=1, \dots, m} \|y_l\|^2 + G_3,$$

où les constantes  $G_1, G_2$  and  $G_3$  ne dépendent ni de  $x$  ni de  $y$ .

(F) Pour tout  $k = 1, \dots, m$ , la fonction  $f_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{dm}; \mathbb{R}^d)$  satisfait pour tout  $y \in \mathbb{R}^{dm}$

$$f_k(y) \cdot y_k \leq F_1 \max_{l=1, \dots, m} \|y_l\|^2 + F_2,$$

où les constantes  $F_1$  et  $F_2$  ne dépendent ni de  $y$  ni de  $k$ .

(U) L'ensemble  $U \subseteq \mathbb{R}^D$  est compact et convexe.

( $\gamma$ ) La fonction  $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe.

Nous rappelons que  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$  est l'espace des mesures de probabilité avec moment premier borné, où la distance de Wasserstein  $W_1(\mu, \nu)$  est bornée pour toute paire  $(\mu, \nu)$ , voire Section 1.1. Sous ces hypothèses, nous avons l'existence d'une solution du Problème ( $\mathbf{P}_N$ ), c'est-à-dire d'une commande minimisante  $u_N$ , voire par exemple [44, Thm 23.11].

Il est clair que, aussi bien pour la dynamique (42) que pour le coût (43), nous avons indistinguabilité des particules  $x_1, \dots, x_N$ . Nous pouvons donc considérer la limite de champ moyen pour (42) et la limite des mesures dans le coût (43). Sous les hypothèses ( $\mathbf{H}$ ), le problème limite est le problème de commande optimale suivant :

### PROBLÈME ( $\mathbf{P}$ )

Pour  $T > 0$  fixé, trouver  $u^* \in L^1([0, T]; U)$  minimisant le coût

$$F(u) = \int_0^T [L(y(t), \mu(t)) + \gamma(u(t))] dt, \quad (44)$$

avec  $(y, \mu)$  solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{y}_k(t) = (K \star \mu_t)(y_k(t)) + f_k(y(t)) + B_k u(t), & k = 1, \dots, m, \\ \partial_t \mu(t) + \nabla \cdot [(K \star \mu(t) + g(y(t)))\mu(t)] = 0, \end{cases} \quad (45)$$

et donnée initiale  $(y(0), \mu(0)) = (y^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ .

Dans ce problème limite, nous avons imposé une condition en plus : la donnée initiale  $\mu(0)$  est un élément de l'espace des mesures à support compact  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ . En effet, la limite des mesures empiriques peut ne pas exister, ou ne pas être une mesure de probabilité. En imposant l'existence d'un ensemble borné contenant les  $x_i$  pour tout  $i$  et tout  $N$ , la limite de  $\mu_N$  (si elle existe) est une mesure à support dans l'ensemble borné.

Deux questions se posent entre les problèmes ( $\mathbf{P}_N$ ) et le Problème ( $\mathbf{P}$ ) :

1. La solution du Problème ( $\mathbf{P}$ ) est-elle limite de solutions des problèmes ( $\mathbf{P}_N$ ) ?
2. Pouvons-nous écrire un PMP pour le Problème ( $\mathbf{P}$ ) comme limite des PMP pour les problèmes ( $\mathbf{P}_N$ ) ?

Nous avons étudié la première question dans [R6], et généralisé ces résultats en Section 2.2 de [R7]. Pour répondre à cette question, nous avons utilisé le concept de  $\Gamma$ -convergence (voire [51]). Nous rappelons sa définition ici.

**Définition 2.8** ( $\Gamma$ -convergence). [51, Definition 4.1, Proposition 8.1] Soit  $X$  un espace métrisable et  $F_N: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ ,  $N \in \mathbb{N}$  une séquence de fonctionnelles. Nous disons que  $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers  $F$ , dénoté avec  $F_N \xrightarrow{\Gamma} F$ , pour une certaine fonctionnelle  $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ , si

1. condition lim inf : Pour tout  $u \in X$  et toute séquence  $u_N \rightarrow u$ , il vaut

$$F(u) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} F_N(u_N);$$

2. condition lim sup : Pour tout  $u \in X$ , il existe une séquence  $u_N \rightarrow u$  telle que

$$F(u) \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} F_N(u_N).$$

Nous appelons aussi la séquence  $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$  équi-coercitive si pour tout  $c \in \mathbb{R}$  il existe un ensemble compact  $K \subseteq X$  tel que  $\{u : F_N(u) \leq c\} \subseteq K$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . Une conséquence directe de l'équi-coercitivité, sous l'hypothèse que  $u_N^* \in \arg \min F_N \neq \emptyset$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , est qu'il existe une sous-séquence  $(u_{N_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $u^* \in X$  telle que

$$u_{N_k}^* \rightarrow u^* \in \arg \min F.$$

Dans notre cas, fixons  $X = L^1([0, T]; U)$  doté de la topologie  $L^1$ , qui est un espace métrisable. Etant donné une donnée initiale  $(y^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ , choisissons une séquence  $\mu_N^0$  de mesures empiriques à support dans  $\text{supp}(\mu^0) + \overline{B(0, 1)}$  et convergeant vers  $\mu^0$  dans l'espace  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  doté de la topologie de la convergence des mesures.

Définissons la fonctionnelle  $F(u)$  sur  $X$  par la formule (44), où le couple  $(y, \mu)$  est donné par la seule solution de (45) avec donnée initiale  $(y^0, \mu^0)$  et commande  $u$ . De la même façon, définissons les fonctionnelles  $F_N(u)$  sur  $X$  par la formule (43), où le couple  $(y_N, \mu_N)$  est donné par la seule solution de (45) avec donnée initiale  $(y^0, \mu_N^0)$  et commande  $u$ . Comme expliqué en Section 2.1, cette solution coïncide avec la solution du système (42).

Nous avons prouvé dans [R6] et [R7] le résultat suivant.

**Théorème 2.9.** Soit donné les fonctionnelles (43), (44) et la dynamique (45) satisfaisant les hypothèses **(H)**. Soit donné aussi une donnée initiale  $(y^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ , et une séquence  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$ , avec  $\text{supp}(\mu_N^0) \subset \text{supp}(\mu^0) + \overline{B(0, 1)}$  et  $\mu_N^0 \rightharpoonup \mu^0$ . Alors la séquence de fonctionnelles  $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$  définie par (43)  $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $F$  définie par (44).

Ce résultat répond à la question 1 de la façon suivante.

**Corollaire 2.10.** Sous les hypothèses **(H)**, il existe au moins une solution du problème **(P)**, et au moins l'une des solutions est la limite des solutions des problèmes **(P<sub>N</sub>)**. A l'envers, toute limite de solutions des problèmes **(P<sub>N</sub>)**, ou de ses sous-successions, est solution du problème **(P)**.

Pour ces raisons, nous définissons des solutions particulières du problème  $(\mathbf{P})$ , qui sont celles qui peuvent être trouvées par limite des solutions des problèmes  $(\mathbf{P}_N)$ .

**Définition 2.11.** Soit  $(y^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  donné. Une commande optimale  $u^*$  pour le Problème  $(\mathbf{P})$  avec donnée initiale  $(y^0, \mu^0)$  est une commande optimale de champ moyen s'il existe une séquence  $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset L^1([0, T]; U)$  et une séquence  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  telles que

1. pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_N^0(\cdot)$  est une séquence de mesures empiriques telle que  $\mu_N^0 \rightharpoonup \mu^0$ ;
2. pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $u_N^*$  est une solution du Problème  $(\mathbf{P}_N)$  avec donnée initiale  $(y^0, \mu_N^0)$ ;
3. il existe une sous-séquence  $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement dans  $L^1([0, T]; U)$  vers  $u^*$ .

Dans ce langage, le Corollaire 2.10 se relit de la façon suivante : sous les hypothèses  $(\mathbf{H})$ , il existe au moins une commande optimale de champ moyen pour le Problème  $(\mathbf{P})$ .

Le seul cas qui n'est pas traité par ce résultat est donc la description complète des solutions du problème  $(\mathbf{P})$ . En effet, notre résultat n'exclut pas l'existence d'une solution du problème  $(\mathbf{P})$  qui n'est pas limite des solutions des problèmes  $(\mathbf{P}_N)$ . Ce phénomène, presque inévitable pour les limites des minimisants, n'est pas crucial pour les applications de la commande optimale, pour lesquelles il suffit souvent de trouver une seule des commandes minimisantes.

Nous nous intéressons maintenant à la question 2, c'est-à-dire à la recherche d'une formule du type PMP pour le problème  $(\mathbf{P})$ . Nous rappelons que le PMP transforme un problème de commande optimale en dimension  $d$  en un système Hamiltonien de dimension  $2d$ , où la commande optimale est la maximisante d'un Hamiltonien, et les variables d'états sont couplées avec de nouvelles variables, dites variables adjointes. Nous appliquons d'abord le PMP au problème  $(\mathbf{P}_N)$ .

**Théorème 2.12** (Theorem 22.2, [44]). Soit  $u_N^*$  une solution du problème  $(\mathbf{P}_N)$  avec donnée initiale  $(y(0), x(0)) = (y^0, x^0)$ , et dénotons avec  $(y^*(\cdot), x^*(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{dm+dN}$  la trajectoire correspondante. Alors il existe une courbe Lipschitzienne

$$(y^*(\cdot), q^*(\cdot), x^*(\cdot), p^*(\cdot)) \in \text{Lip}([0, T], \mathbb{R}^{2dm+2dN})$$

solution du système

$$\begin{cases} \dot{y}_k^* &= \nabla_{q_k} \mathbb{H}_N(y^*, q^*, x^*, p^*, u^*), \\ \dot{q}_k^* &= -\nabla_{y_k} \mathbb{H}_N(y^*, q^*, x^*, p^*, u^*), & k = 1, \dots, m, \\ \dot{x}_i^* &= \nabla_{p_i} \mathbb{H}_N(y^*, q^*, x^*, p^*, u^*), \\ \dot{p}_i^* &= -\nabla_{x_i} \mathbb{H}_N(y^*, q^*, x^*, p^*, u^*), & i = 1, \dots, N, \\ u_N^* &= \arg \max_{u \in U} \mathbb{H}_N(y^*, q^*, x^*, p^*, u), \end{cases} \quad (46)$$

avec donnée initiale  $(y(0), x(0)) = (y^0, x^0)$  et donnée finale  $(q(T), p(T)) = 0$ , où le

Hamiltonien  $\mathbb{H}_N : \mathbb{R}^{2dm+2dN} \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_N(y, q, x, p, u) = & \sum_{i=1}^N p_i \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) + g(y)(x_i) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^m q_k \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(y_k - x_j) + f_k(y) + B_k u \right) - L(y, \mu_N) - \gamma(u), \end{aligned} \quad (47)$$

avec  $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ .

**Remarque 2.13.** *La formulation générale du PMP présente tout autant les minimisants normaux qu'anormaux. Dans notre cas, la formulation est simplifiée par la non-existence de minimisants anormaux, à cause du fait que la configuration finale est libre, voire par exemple [44, Corollary 22.3].*

La question qui se pose maintenant est de comprendre si ce système admet une limite pour  $N$  qui tend vers l'infini. Il faudra donc identifier le Hamiltonien limite, mais surtout comprendre le concept de limite pour les variables adjointes  $p_i$ . Plus précisément, nous nous demandons s'il est possible d'introduire une mesure de probabilité  $\nu$  dans l'espace  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  qui soit la limite de la mesure empirique  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, p_i)}$ . Cette approche n'est pas correcte, car il existe un problème de changement d'échelle dans le Hamiltonien  $\mathbb{H}_N$ . En effet, on peut observer que le fait de plonger une trajectoire du PMP pour le problème  $(\mathbf{P}_N)$  dans une éventuelle formulation avec mesures dépend du nombre  $N$  d'agents. Par exemple, considérons une population composée d'un seul agent, de coordonnées  $(x_1, p_1)$  dans la formulation du PMP ; le premier terme du Hamiltonien est donc  $p_1 \cdot g(y)(x_1)$ . Si on considère maintenant une population de deux agents de coordonnées  $(x_1, p_1, x_2, p_2)$  satisfaisant  $x_1 = x_2$  et  $p_1 = p_2$ , le premier terme devient  $2p_1 \cdot g(y)(x_1)$ .

Ce problème de changement d'échelle peut être résolu en introduisant le vecteur  $r = Np$ . Avec ce changement d'échelle, la limite du PMP énoncé dans le Théorème 2.12 existe et assume la forme d'un PMP dans le nouvel espace  $\mathbb{R}^{md} \times \mathbb{R}^{md} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ . Nous l'exposons dans le Théorème 2.14 suivant, qui est le résultat principal de cette section avec le Théorème 2.9 et le Corollaire 2.10 correspondant.

**Théorème 2.14.** *Soit donné une donnée initiale  $(y^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  et assumons les Hypothèses **(H)**. Alors, il existe une commande optimale de champ moyen du Problème **(P)**. De plus, si  $u^*$  est la commande optimale de champ moyen pour le problème **(P)** et  $(y^*, \mu^*)$  est la trajectoire correspondante, alors  $(u^*, y^*, \mu^*)$  satisfait le **Principe du Maximum de Pontryagin généralisé** suivant :*

*Il existe  $(q^*(\cdot), \nu^*(\cdot)) \in \text{Lip}([0, T]; \mathbb{R}^{dm} \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^{2d}))$  tel que*

- 1. il existe  $R_T > 0$ , ne dépendant que de  $y^0, \text{supp}(\mu^0), d, K, g, f_k, B_k, U$ , et  $T$ , tel que  $\text{supp}(\nu^*(\cdot)) \subseteq B(0, R_T)$  et il satisfait  $\nu^*(t)(E \times \mathbb{R}^d) = \mu^*(t)(E)$  pour tout  $t \in [0, T]$  et tout ensemble de Borel  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  ;*
- 2. la courbe  $(q^*(\cdot), \nu^*(\cdot))$  satisfait l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dot{y}_k^* &= \nabla_{q_k} \mathbb{H}_c(y^*, q^*, \nu^*, u^*), \\ \dot{q}_k^* &= -\nabla_{y_k} \mathbb{H}_c(y^*, q^*, \nu^*, u^*), \\ \partial_t \nu^* &= -\nabla_{(x,r)} \cdot ((J \nabla_{\nu} \mathbb{H}_c(y^*, q^*, \nu^*, u^*)) \nu^*), \\ u^* &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{H}_c(y^*, q^*, \nu^*, u) \end{cases} \quad (48)$$

avec  $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$  étant la matrice symplectique, le Hamiltonien  $\mathbb{H}_c : \mathbb{R}^{2dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\mathbb{H}_c(y, q, \nu, u) = \begin{cases} \mathbb{H}(y, q, \nu, u) & \text{if } \text{supp}(\nu) \subseteq \overline{B(0, R_T)}, \\ +\infty & \text{elsewhere;} \end{cases}$$

et  $\mathbb{H} : \mathbb{R}^{2dm} \times \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $\mathbb{H}(y, q, \nu, u) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4d}} (r - r') \cdot K(x - x') d\nu(x, r) d\nu(x', r') + \int_{\mathbb{R}^{2d}} r \cdot g(y)(x) d\nu(x, r) \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^{2d}} q_k \cdot K(y_k - x) d\nu(x, r) + \sum_{k=1}^m q_k \cdot (f_k(y) + B_k u) + \\ &-L(y, \pi_1 \# \nu) - \gamma(u), \end{aligned} \quad (49)$$

avec  $\pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par  $\pi_1(x, r) = x$ .

3. les conditions suivantes pour le système (48) sont satisfaites au temps  $t = 0$  :  $y^*(0) = y^0$  et  $\nu^*(0)(E \times \mathbb{R}^d) = \mu^0(E)$  pour tout ensemble de Borel  $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ,
4. les conditions suivantes pour le système (48) sont satisfaites au temps  $t = T$  :  $q^*(T) = 0$  et  $\nu^*(T)(\mathbb{R}^d \times E) = \delta_0(E)$  pour tout ensemble de Borel  $E \subseteq \mathbb{R}^d$ , où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac en 0.

Il est intéressant d'observer que tous les éléments typiques du PMP se retrouvent dans ce PMP généralisé : la dynamique, la condition initiale pour les variables d'état et la condition finale du type  $p = 0$  pour les covecteurs. L'aspect de nouveauté que nous avons apporté réside surtout dans le fait que cette formulation en termes de mesures soit possible, et que ce résultat puisse être prouvé par limite du PMP pour les problèmes ( $\mathbf{P}_N$ ).

L'autre aspect remarquable de cette étude est la présence du terme  $\nabla_{\nu} \mathbb{H}_c$ , appelé gradient de Wasserstein de  $\mathbb{H}_c$ , voire une introduction dans [7]. Au-delà de certaines requêtes nécessaires de compacité qui nous obligent à imposer le support compact de  $\nu^*$  en condition 1 et à utiliser  $\mathbb{H}_c$  à la place de  $\mathbb{H}$ , l'équation  $\partial_t \nu^* = -\nabla_{(x,r)} \cdot J \nabla_{\nu} \mathbb{H}_c$  est ce qui est de plus naturel pour généraliser la dynamique de  $(x_i, p_i)$  : une équation de transport avec champ de vecteurs non-local donné par la dynamique Hamiltonienne

$$x_i = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x_i}.$$

De plus, dans notre cas particulier, le gradient de Wasserstein peut être calculé

explicitement et il a l'expression suivante :

- les composantes de  $\nabla_\nu \mathbb{H}_c(y, q, \nu, u)(x, r)$  dans les coordonnées  $x_l$  pour  $l = 1, \dots, d$  sont données par

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \mathbb{H}_c(y, q, \nu, u)(x, r) \cdot e_l &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (r - r') \cdot (\nabla K(x - x') e_l) d\nu(x', r') + \\ &+ r \cdot (\nabla_x g(y)(x) e_l) - \sum_{k=1}^m q_k \cdot (\nabla K(y_k - x) e_l) - \nabla_\xi \ell(y, x, \int \omega \mu) \cdot e_l + \\ &- (\nabla_\varsigma \ell(y, x, \int \omega \mu) \nabla \omega(x)) \cdot e_l. \end{aligned}$$

où  $\nabla_\xi \ell$  et  $\nabla_\varsigma \ell$  dénotent les dérivées partielles de la fonction  $\ell(\eta, \xi, \varsigma)$ , et  $\nabla \omega(x)$  est le Jacobien de la fonction  $\omega$  calculé en  $x$  ;

- Les composantes de  $\nabla_\nu \mathbb{H}_c(y, q, \nu, u)(x, r)$  dans les coordonnées  $r_{l-d}$  pour  $l = d + 1, \dots, 2d$  sont données par

$$\nabla_\nu \mathbb{H}_c(y, q, \nu, u)(x, r) \cdot e_l = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x - x') \cdot e_{l-d} d\nu(x', r') + g(y)(x) \cdot e_{l-d}.$$

## 2.4 Quelques perspectives de recherches

Les problèmes ouverts de commande de l'équation de transport avec vitesses non-locales sont encore très nombreux. Maintenant, nous en décrivons trois qui nous intéressent particulièrement.

La première question qui se pose est évidemment celle des actions de commande admissibles pour une équation de transport avec vitesses non-locales. Nous avons vu que les commandes peuvent être dépendantes des variables d'état (Section 2.2) ou existantes dans une autre équation couplée (Section 2.3). Il est intéressant de comprendre quelles sont les autres actions possibles des commandes dans ce contexte. En particulier, on ne sait pas encore s'il est possible de commander une mesure multi-échelle n'agissant que sur une seule de ses deux parties (Dirac ou absolument continue). Par exemple, commander la seule partie de Dirac reviendrait à commander les leaders dans une foule, comme en Section 2.3. Plusieurs solutions sont envisageables : la première est une approche plutôt formelle, dans laquelle nous considérons les courbes Lipschitziennes de  $P(X)$  et comprenons quelles actions peuvent être décrites par des champs de vecteurs généralisés, comme expliqué en Section 1.5. La deuxième est une approche avec des fonctions de commande localisées dans des boules de rayon  $\varepsilon$  autour des points du support de la mesure de Dirac. Il s'agit de vérifier s'il est possible de considérer une limite de ces fonctions de commande pour  $\varepsilon$  qui tend vers zéro, et si cela donne une description cohérente de la dynamique des mesures dans  $\text{Lip}([0, T], \mathcal{P}(X))$ .

Le deuxième sujet de recherche, lié à nos résultats de la Section 2.2, concerne la solution du problème de commande de l'équation de transport avec champ de vecteurs localisé. Nous avons déjà discuté sa généralisation aux systèmes coopératifs, mais il est beaucoup plus intéressant et techniquement difficile d'étudier la commandabilité d'un système décrit par une équation du type

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot ((v[\mu] + \chi_\omega u) \mu) = 0 \tag{50}$$

avec  $v$  satisfaisant les hypothèses de régularité de la Section 1.1. Même si un résultat général de commandabilité semble hors de portée, nous avons des pistes de recherches pour la commandabilité locale autour d'une trajectoire du système. Comme première étape, nous souhaitons démontrer un résultat de la forme suivante. Etant donné une trajectoire de mesures absolument continues  $\mu(t) = f(t) dx$  de (50) sans commande, nous considérons le champ de vecteurs  $v[\mu(t)]$  comme dépendant du temps seulement, et engendrant donc un flot  $\phi_t$ . Soit  $\omega$  l'ensemble ouvert et connecté sur lequel la commande agit : nous voulons prouver qu'en partant de n'importe quelle densité de probabilité avec support dans  $\cup_{t < 0} \{\phi_t(\omega)\}$ , nous pouvons atteindre n'importe quelle autre densité de probabilité avec support dans  $\cup_{t > 0} \{\phi_t(\omega)\}$ . L'idée de la conjecture est donnée en Figure 3 : une densité de probabilité  $f_1$  à support dans  $\cup_{t < 0} \{\phi_t(\omega)\}$  croisera l'ensemble de commande  $\omega$ , où elle sera déformée, pour atteindre  $f_2$  avec support dans  $\cup_{t > 0} \{\phi_t(\omega)\}$ .

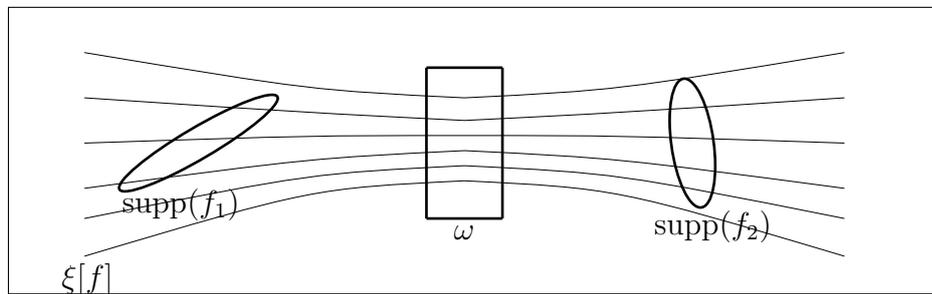


FIGURE 3 – Conjecture pour la commande de (50).

Observons que la conjecture n'est établie que pour des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue à cause du fait que les parties Dirac et absolument continue restent séparées pour des dynamiques de type (50).

L'étape suivante sera donc la preuve de résultats de commandabilité locale autour d'une trajectoire. La possibilité d'étendre ces résultats à la commandabilité globale sous certaines hypothèses sera aussi étudiée. Ce sujet de recherche est mené en collaboration avec M. Morancey.

Enfin, le troisième et dernier problème ouvert concerne la possibilité d'améliorer nos résultats de la Section 2.3 concernant le Principe du Maximum de Pontryagin. Notre résultat est très spécifique et ne résout pas plusieurs questions typiques liées au Principe du Maximum de Pontryagin. La première question – et c'est peut-être la plus facile – concerne l'écriture des conditions de transversalité différentes de celles du Théorème 2.14. L'exemple le plus important est celui des conditions imposant d'aller d'une configuration à une autre. Cela entraînerait aussi l'existence des extrémales anormales, qui devraient être intégrées à la formulation avec mesures dans  $P_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , ou négligées à cause d'éventuelles considérations probabilistes. Enfin, la forme du coût et donc du Hamiltonien donne un seul minimisant  $u^*$  pour chaque point de l'espace des variables : cette condition est pour l'instant cruciale pour prouver la  $\Gamma$ -convergence et pour établir la limite du Principe de Maximum de Pontryagin. Une généralisation à une classe plus large de coûts serait une avancée majeure dans la compréhension des limites de champ moyen dans le cas des systèmes de commande.



### 3 Commande géométrique

Dans cette section, j'expose plusieurs sujets de recherches assez indépendants par rapport aux résultats des sections précédentes. Cependant, les techniques utilisées pour résoudre ces différents problèmes relèvent toutes de la commande géométrique.

En Section 3.1, je décris mes recherches dans les domaines de la géométrie sous-Riemannienne et des équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite) hypoelliptiques, qui sont en étroite connexion entre elles. Les définitions de base, ainsi que certains résultats originaux développés pendant ma thèse, sont rappelés dans la Section 3.1.1 introductive. C'est grâce à l'utilisation de la géométrie sous-Riemannienne que je prouve des estimations intéressantes pour les EDP hypoelliptiques, toutes développées après ma thèse. En Section 3.1.2 je m'intéresse à l'estimation des solutions en temps grand de l'équation de la chaleur hypoelliptique sur les groupes de Carnot. Il s'agit d'un travail autonome, développé pendant mon année de Post-Doc et publié dans [R8]. La Section 3.1.3 présente le calcul explicite des noyaux de la chaleur hypoelliptique pour deux groupes de Carnot particuliers, avec vecteur de croissance  $(2, 3, 4)$  et  $(2, 3, 5)$ . Ces résultats ont été développés en collaboration avec U. Boscain et J.-P. Gauthier et publiés dans [R9].

En Section 3.2 je présente le modèle de Petitot, décrivant la capacité du cortex visuel humain de reconstruire des images corrompues. Ce modèle s'écrit dans la forme d'un problème de commande optimale pour un système non-holonyme. J'étudie certaines propriétés intéressantes de ce problème, et notamment l'existence de minimisants globaux et locaux. Ces travaux sont le fruit d'une collaboration avec U. Boscain, R. Duits et Y. Sachkov, voire [R10]. Ils font partie d'un grand projet de collaboration, incluant notamment J. Petitot, J.-P. Gauthier, A. Agrachev, M. Sigalotti, D. Prandi et L. Suriano. Même si j'ai commencé l'étude du modèle de Petitot pendant ma thèse, voire [25], les résultats ici présentés ont été développés à partir de 2010.

En Section 3.3, je considère un système de commande quantique, prouvant que la commandabilité exacte et la commandabilité approchée sont équivalentes dans ce cas. L'intérêt pour ce résultat est tout autant applicatif (car il existait déjà des résultats prouvant la commandabilité approchée du système) que théorique, puisqu'il est basé sur une utilisation profonde de la théorie des représentations des groupes de Lie. Ce sujet est un travail récent, développé en collaboration avec U. Boscain, J.-P. Gauthier et M. Sigalotti, voire [R11].

Enfin, en Section 3.4, je décris mes résultats sur la discrétisation des systèmes linéaires. Je trouve une classe de fonctions de Lyapunov polyédrales qui sont préservées par l'approximation de Padé d'un système linéaire. Cette classe devient ainsi, grâce à mes recherches, un instrument en plus pour vérifier qu'un système linéaire hybride stable reste stable après l'approximation de Padé. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec R. Shorten et P. Colaneri, ainsi qu'avec l'étudiant S. Sajja, commencée après ma thèse pendant un séjour au Hamilton Institute, Maynooth, Irlande. Il a été publié dans [R12] et [R13].

Même si ces sujets touchent à différents domaines de recherche, il existe plusieurs aspects communs entre eux, et avec les résultats des Sections 1 et 2. Un premier aspect est donné par l'omniprésence de problèmes de commande, et en particulier

des méthodes de contrôle géométrique, qui est mon sujet de recherches depuis 2006. Comme déjà souligné, tous les résultats présentés dans ce mémoire ont cependant été développés après ma thèse.

Un deuxième aspect unifiant de mes recherches est l'intérêt porté aux EDP : en particulier, j'étudie et je développe les méthodes permettant de passer de certaines propriétés d'un système en dimension finie aux propriétés d'une EDP qui y est liée. Ce passage peut être aussi bien la limite de champ moyen de Section 2.1 qu'une série d'analogies entre systèmes de commande sous-Riemanniens et EDP hypoelliptiques associées, voire Section 3.1.1. Cela porte aussi à développer des méthodes numériques performantes pour les EDP, que ce soit pour l'EDP de transport en Section 1.2 ou pour l'EDP hypoelliptique de la chaleur du modèle de Petitot en Section 3.2, voire [23, 25, 26].

Dans le reste de cette section, une forme verbale plurielle a été préférée, respectant ainsi le caractère collaboratif de la plupart de mes recherches.

### 3.1 Equation de la chaleur hypoelliptique

Dans cette section, nous exposons nos résultats sur l'étude des solutions des équations de la chaleur hypoelliptiques. Après avoir rappelé les définitions fondamentales de la géométrie sous-Riemannienne et des opérateurs hypoelliptiques en Section 3.1.1, nous présentons deux résultats originaux à ce sujet.

En Section 3.1.2, nous étudions les groupes de Carnot qui sont des structures avec topologie triviale Euclidienne, mais où il est possible d'écrire des EDP hypoelliptiques de la chaleur intéressantes. Pour ces EDP, nous montrons comment estimer l'évolution de leurs solutions en temps grand en utilisant une méthode basée sur le calcul des moments sous-Riemanniens associés.

En Section 3.1.3, nous rappelons d'abord une méthode pour le calcul explicite des noyaux de la chaleur hypoelliptique développée pendant ma thèse avec nos collaborateurs en [3], basée sur la Transformée de Fourier Généralisée aux groupes de Lie. Nous appliquons ensuite cette méthode à deux groupes de Carnot, les groupes  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$  avec vecteurs de croissance  $(2, 3, 4)$  et  $(2, 3, 5)$ , respectivement. Elle permet de transformer l'EDP hypoelliptique en une équation plus simple, qui est dans notre cas une EDP de la chaleur uni-dimensionnelle avec potentiel quartique.

#### 3.1.1 Géométrie sous-Riemannienne et opérateurs hypoelliptiques

Dans cette section, nous présentons les définitions fondamentales de la géométrie sous-Riemannienne et des opérateurs hypoelliptiques associés. Pour plus de détails, voire par exemple [2, 21].

Nous rappelons d'abord la définition des variétés sous-Riemanniennes.

**Définition 3.1.** *Une variété sous-Riemannienne est un triplet  $(M, \mathbf{\Delta}, \mathbf{g})$ , avec*

- $M$  variété différentielle lisse et connectée de dimension  $n$  ;
- $\mathbf{\Delta}$  distribution lisse de rang constant  $m < n$  satisfaisant la **condition d'Hörmander**

$$\text{span} \{ [X_1, [\dots [X_{k-1}, X_k] \dots]](q) \mid X_i \in \text{Vec}_H(M) \} = T_q M, \quad (51)$$

où  $\text{Vec}_H(M)$  est l'ensemble des **champs de vecteurs horizontaux** de  $M$  :

$$\text{Vec}_H(M) = \{X \in \text{Vec}(M) \mid X(p) \in \blacktriangle(p) \ \forall p \in M\}.$$

—  $\mathbf{g}_q$  métrique Riemannienne sur  $\blacktriangle(q)$ , lisse en tant que fonction de  $q$ .

Une courbe Lipschitzienne  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  est dite **horizontale** si  $\dot{\gamma}(t) \in \blacktriangle(\gamma(t))$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Pour une courbe horizontale  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ , sa *longueur* est

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\mathbf{g}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt. \quad (52)$$

La *distance* correspondante à la structure sous-Riemannienne sur  $M$  est

$$d(q_0, q_1) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q_1, \gamma \text{ horizontale}\}. \quad (53)$$

La fonction  $d(\cdot, \cdot)$  est dite *distance de Carnot-Charateodory*; voire [13, 74].

Nous rappelons la définition du drapeau et du vecteur de croissance d'une distribution.

**Définition 3.2.** Soit  $\blacktriangle$  une distribution. Définissons par récursion

$$\blacktriangle_1 := \blacktriangle, \quad \blacktriangle_{n+1} := \blacktriangle_n + [\blacktriangle_n, \blacktriangle].$$

Le drapeau de  $\blacktriangle$  est la séquence

$$\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2 \subset \dots \subset \blacktriangle_n \subset \dots \quad (54)$$

Le vecteur de croissance est le vecteur des dimensions des  $\blacktriangle_i$ .

Une variété sous-Riemannienne est dite **régulière** si pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la dimension de  $\blacktriangle_i(q)$  ne dépend pas de  $q$ .

Nous présentons une structure sous-Riemannienne qui peut être définie sur les groupes de Lie. Pour les définitions de base des groupes de Lie utilisées dans la suite, voire par exemple [12].

**Définition 3.3.** Soit  $G$  un groupe de Lie avec son algèbre de Lie  $\mathfrak{L}$ . Soit  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{L}$  un sous-espace de  $\mathfrak{L}$  satisfaisant la condition des **crochets de Lie**

$$\text{Lie } \mathfrak{P} := \text{span} \{[\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{p}_2, \dots, [\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n]]] \mid \mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}\} = \mathfrak{L}. \quad (55)$$

Dotons  $\mathfrak{P}$  d'une forme quadratique définie positive  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Définissons donc une structure sous-Riemannienne sur  $G$  comme suit :

- la distribution est invariante à gauche  $\blacktriangle(g) := g\mathfrak{P}$  ;
- la métrique  $\mathbf{g}$  sur  $\blacktriangle$  est donnée par  $\mathbf{g}_g(v_1, v_2) := \langle g^{-1}v_1, g^{-1}v_2 \rangle$ .

Dans ce cas,  $(G, \blacktriangle, \mathbf{g})$  est dite *variété sous-Riemannienne invariante à gauche*.

Par la suite, nous n'étudierons que ce type de structures sous-Riemanniennes.

**Exemple 3.4.** *L'exemple le plus simple de variété sous-Riemannienne (non-triviale) est donné par le **groupe d'Heisenberg**  $H_2$ , voire par exemple [2] et [21, Chap. 1]. Nous le définissons comme une variété sous-Riemannienne invariante à gauche. Choisissons l'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}$  engendrée par les matrices  $\{l^1, l^2, l^3\}$  ainsi définies :*

$$l^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

*Elles satisfont les règles de commutation suivantes :  $[l^1, l^2] = l^3$ ,  $[l^1, l^3] = [l^2, l^3] = 0$ . Nous écrivons le groupe d'Heisenberg en calculant l'exponentiel des matrices de  $\mathfrak{L}$ , ce qui donne*

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

*doté du produit classique entre matrices. Nous pouvons identifier  $H_2$  avec  $\mathbb{R}^3$ , en écrivant*

$$(x, y, z) \sim \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*et en dotant l'espace  $\mathbb{R}^3$  du produit suivant*

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = \left( x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \right).$$

*Dans  $\mathbb{R}^3$ , les champs de vecteurs invariants à gauche sont engendrés par*

$$X^1 = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z, \quad X^2 = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z, \quad X^3 = \partial_z.$$

Nous définissons le Laplacien intrinsèque sur une variété sous-Riemannienne. Il est défini en calculant la divergence du gradient, comme dans la définition de l'opérateur de Laplace-Beltrami en géométrie Riemannienne. Cette définition a été donnée dans notre article [3].

**Définition 3.5.** *Soit  $(M, \mathbf{\Delta}, \mathbf{g})$  une variété sous-Riemannienne orientable et régulière. Nous définissons le Laplacien intrinsèque comme  $\Delta_H \phi := \operatorname{div}_H \operatorname{grad}_H \phi$ , où*

- le gradient horizontal est le seul opérateur  $\operatorname{grad}_H$  de  $C^\infty(M)$  à  $\operatorname{Vec}_H(M)$  qui satisfait<sup>5</sup>  $\mathbf{g}_q(\operatorname{grad}_H \phi(q), v) = d\phi_q(v) \quad \forall q \in M, v \in \mathbf{\Delta}(q)$ .*
- la divergence d'un champ de vecteurs  $X$  est la seule fonction satisfaisant  $\operatorname{div} X \mu_H = L_X \mu_H$  avec  $\mu_H$  la forme de volume de Popp<sup>6</sup>.*

Le Laplacien ainsi défini est hypoelliptique, selon la définition suivante.

**Définition 3.6.** *Un opérateur  $L$  est hypoelliptique sur  $M$  si pour tout  $U \subset M$  et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $L\phi \in C^\infty(U)$ , alors  $\phi \in C^\infty(U)$ .*

5. Son expression en coordonnées avec  $\{X_1, \dots, X_m\}$  base orthonormée de  $(M, \mathbf{\Delta}, \mathbf{g})$  est  $\operatorname{grad}_H \phi = \sum_{i=1}^m (L_{X_i} \phi) X_i$ .

6. La construction de la forme de volume de Popp est assez élaborée, voire [3, 111].

L'hypoellipticité de  $\Delta_H$  est conséquence de la condition de Hörmander (51) dans la définition de variété sous-Riemannienne, et du théorème de Hörmander, voire [86].

Dans notre étude, nous nous focalisons sur une classe de groupes de Lie, dits unimodulaires<sup>7</sup>. Sous cette hypothèse, le Laplacien  $\Delta_H$  se réduit à la somme de carrés, voire la proposition suivante.

**Proposition 3.7.** *Soit  $(G, \blacktriangle, \mathfrak{g})$  une variété sous-Riemannienne invariante à gauche engendrée par une base orthonormée  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\} \subset \mathfrak{l}$ . Si  $G$  est unimodulaire, alors  $\Delta_H \phi = \sum_{i=1}^m (L_{X_i}^2 \phi)$  avec  $L_{X_i}$  dérivé de Lie par rapport au champ de vecteurs  $X_i = g\mathfrak{p}_i$ .*

### 3.1.2 Estimations en temps grand pour les solutions de l'équation de la chaleur hypoelliptique

Dans cette section, nous présentons des estimations sur les solutions de l'équation de la chaleur hypoelliptique sur les groupes de Carnot. Nous rappelons d'abord la définition des groupes de Carnot et certaines propriétés utiles d'homogénéité des solutions de l'équation de la chaleur hypoelliptique dans ce contexte.

Ensuite, nous montrons que l'estimation en temps grand de la solution de ces équations peut être faite en partant du calcul des moments de la donnée initiale. Ce résultat généralise un résultat similaire pour les équations elliptiques, voire [61]. Il y a une différence principale avec ce résultat : les moments en géométrie sous-Riemannienne sont pondérés par rapport à leur poids dans le drapeau (54). En particulier, les moments le long des coordonnées horizontales donnent une contribution plus importante pour l'estimation en temps grand.

Soit  $\mathfrak{L}$  une algèbre de Lie<sup>8</sup> nilpotente, et  $G$  le groupe de Lie exponentiel de  $\mathfrak{L}$ . L'algèbre  $\mathfrak{L}$  étant nilpotente, la fonction exponentielle  $\exp : \mathfrak{L} \rightarrow G$  est un difféomorphisme. Fixons une base<sup>9</sup>  $\{X^1, \dots, X^N\}$  de  $\mathfrak{L}$ . Dans cette section, la notation  $x = (x_1, \dots, x_N)$  représente autant  $x = \sum x_i X^i \in \mathfrak{L}$  que  $x = \exp(\sum x_i X^i) \in G$ , selon le contexte.

Nous considérons la mesure de Lebesgue  $dx = dX^1 \dots dX^N$  sur  $\mathfrak{L}$ , qui donne à  $G$  une mesure de Haar par push-forward (voire Définition 1.6), que nous dénotons encore avec  $dx$ . Les espaces  $L^p$  de  $G$  seront dans la suite considérés par rapport à cette mesure.

Une famille de dilatations de  $\mathfrak{L}$  est une famille à un paramètre  $\{\Gamma_r \mid 0 < r < \infty\}$  d'automorphismes de  $\mathfrak{L}$  de la forme  $\Gamma_r = \exp(A \log r)$ , avec  $A$  transformation linéaire diagonalisable de  $\mathfrak{L}$  à valeurs propres positives. Les dilatations de  $\mathfrak{L}$  se traduisent en dilatations de  $G$  par l'exponentiel ; nous les dénotons par le même symbol  $\Gamma_r$ . La constante  $Q = \text{Tr}(A)$  est dite *dimension homogène* de  $G$ . Une fonction mesurable  $f$  de  $G$  est dite *homogène de degré*  $\lambda$  si  $f \circ \Gamma_r = r^\lambda f$  pour tout  $r > 0$ . Un opérateur différentiel  $D$  est dit *homogène de degré*  $\lambda$  si  $D(u \circ \Gamma_r) = r^\lambda (Du) \circ \Gamma_r$  pour tout

7. Il s'agit de groupes pour lesquels les mesures de Haar droite et gauche coïncident. Voir par exemple [12].

8. Pour plus de détails sur les algèbres et les groupes de Lie, voire [12].

9. La notation  $X^i$  avec  $i \in \{1, \dots, N\}$  dénote un vecteur de la base de  $\mathfrak{L}$ .

$u \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$  et  $r > 0$ . Nous avons  $d(\Gamma_r x) = r^Q dx$ . Pour les preuves et plus de détails, voire [68].

Nous considérons une classe d'algèbres de Lie nilpotentes, dites **algèbres de Lie stratifiées**. Une stratification d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{L}$  est une décomposition  $\mathfrak{L} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{L}_i$  satisfaisant  $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_i] = \mathfrak{L}_{i+1}$  pour  $1 \leq i < s$  et  $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_s] = 0$ . Si  $\mathfrak{L}$  est stratifiée, alors elle admet une famille de dilatations

$$\Gamma_r(X_1 + \dots + X_s) = rX_1 + r^2X_2 + \dots + r^sX_s,$$

avec<sup>10</sup>  $X_i \in \mathfrak{L}_i$ . Un **groupe stratifié**  $G$  est l'exponentiel d'une algèbre de Lie stratifiée. Dans ce cas, la dimension homogène est  $Q = \sum_{i=1}^s i \dim(\mathfrak{L}_i)$ , et un champ de vecteurs  $X$  considéré comme opérateur différentiel est homogène de degré  $i$  si et seulement si  $X \in \mathfrak{L}_i$ . Nous utilisons le symbole  $s$  pour représenter le nombre de strates de  $G$  et  $w^i$  le degré d'homogénéité de  $X^i$ . Nous dénotons aussi  $n = \dim(\mathfrak{L}_1)$ .

Etant donné un groupe de Lie stratifié  $G$ , nous définissons une forme quadratique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  sur  $\mathfrak{L}_1$ . Cette structure définit un **groupe de Carnot**. Les groupes de Carnot sont dotés d'une métrique sous-Riemannienne invariante à gauche en choisissant une base orthonormale pour  $\mathfrak{L}_1$  par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ , comme expliqué en Section 3.1.1.

Par la suite, nous utilisons aussi une autre métrique sur un groupe de Carnot. Définissons une forme quadratique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$  sur toute l'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}$  qui coïncide avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  sur  $\mathfrak{L}_1$  et telle que les  $\mathfrak{L}_i$  soient orthogonales par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ . Nous introduisons la norme correspondante  $\|v\|_R := \langle v, v \rangle_R$  sur  $\mathfrak{L}$ , et la norme sur  $G$

$$\|\exp(X_1 + X_2 + \dots + X_s)\|_R := \left( \sum_{i=1}^s |X_i|_{R^i}^{\frac{2(s!)}{i}} \right)^{\frac{1}{2(s!)}}$$

qui est homogène de degré 1. Il est intéressant d'observer que la forme quadratique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$  n'est pas intrinsèque sur le groupe de Carnot  $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_S)$ , mais que toutes les normes de ce type sont équivalentes.

**Exemple 3.8.** *Le groupe d'Heisenberg  $H_2$  défini dans l'Exemple 3.4 est un groupe de Carnot, en choisissant la stratification  $\mathfrak{L}_1 = \text{span}\{X^1, X^2\}$  et  $\mathfrak{L}_2 = \text{span}\{X^3\}$ , avec  $\{X^1, X^2\}$  base orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ . Sa dimension homogène est 4.*

*Nous définissons aussi  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$  en choisissant la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  orthonormée, ce qui donne la norme  $\|(x, y, z)\|_R = \sqrt[4]{|x|^4 + |y|^4 + |z|^2}$ .*

Comme déjà expliqué, les groupes de Carnot sont naturellement dotés d'une structure sous-Riemannienne invariante à gauche. Ils sont donc aussi dotés d'une définition intrinsèque du Laplacien hypoelliptique. Etant donné une base orthonormée  $\{X^1, \dots, X^n\}$  pour  $\mathfrak{L}_1$  par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ , le Laplacien est la somme de carrés

$$\Delta_H := \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

car tout groupe de Carnot est nilpotent, donc unimodulaire, voire [12].

---

10. La notation  $X_i$  avec  $i \in \{1, \dots, s\}$  dénote un vecteur générique  $X_i \in \mathfrak{L}_i$ .

Dans cette section, nous étudions la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur hypoelliptique

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta_H f, \\ f(t=0, \cdot) = f_0. \end{cases} \quad (57)$$

Nous rappelons certaines propriétés utiles.

**Théorème 3.9** ([68] (2.1),(2.11),(3.1)). *Soit  $G$  un groupe de Carnot de dimension homogène  $Q > 2$ . alors l'opérateur de la chaleur  $\partial_t - \Delta_H$  est homogène de degré 2. Il existe un seul noyau de la chaleur*

$$P : \begin{array}{ll} G \times (0, +\infty) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto P_t(x) \end{array}$$

avec  $P_0(\cdot) = \delta_0$ . Il satisfait  $P_t(x) \geq 0$ ,  $\int_G P_t(x) dx = 1$  pour tout  $t$  et  $P_{r^2 t}(\Gamma_r(x)) = r^{-Q} P_t(x)$ .

La solution de (57) est donnée par la **convolution**  $f_t = f_0 * P_t$ , où l'opération de convolution est intrinsèquement définie sur les groupes de Lie (voire [3]). Nous utiliserons cette propriété dans la suite.

Pour estimer l'évolution des solutions de (57), nous généralisons aux groupes de Carnot une décomposition des fonctions, basée sur les deltas de Dirac et leurs dérivées, introduite dans [61] pour les fonctions sur  $\mathbb{R}^N$ .

**Proposition 3.10.** *Soit  $f$  une fonction de  $G$  et  $p \in [1, \infty]$ .*

- *Si  $p < Q/(Q-1)$ ,  $f \in L^1(G)$  et  $|x|_R f \in L^p(G)$ , alors il existe  $F \in (L^p(G))^N$  tel que  $f = (\int f) \delta_0 + \text{div} F$ .*
- *Si  $p > Q/(Q-s)$  et  $|x|_R f \in L^p(G)$ , alors il existe  $F \in (L^p(G))^N$  tel que  $f = \text{div} F$ .*

*Nous avons  $\|F_j\|_p \leq C_{p,N} \| |x|_R f \|_p$  pour tout  $j = 1, \dots, N$ .*

Nous avons aussi une décomposition d'ordre plus élevé dans le même esprit.

**Théorème 3.11.** *Soit  $f$  une fonction de  $G$ , et  $p \in [1, \infty]$ .*

- *Si  $p < \frac{Q}{Q-1}$ ,  $f \in L^1(G, 1 + |x|_R)$  et  $|x|_R f, |x|_R^2 f \in L^p(G)$ , alors*

$$f = (\int_G f) \delta_0 - \sum_{i=1}^n (\int f x_i) (X_i \delta_0) + \sum_{i,j=1}^N X^i X^j (F_{ij}) + \sum_{i=n+1}^N X^i (F_i).$$

- *Si  $p > \frac{Q}{Q-2s}$  et  $|x|_R f, |x|_R^2 f \in L^p(G)$ , alors*

$$f = \sum_{i,j=1}^N X^i X^j (F_{ij}) + \sum_{i=n+1}^N X^i (F_i).$$

*Dans les deux cas, nous avons  $\|F_{ij}\|_p \leq C \| |x|_R^2 f \|_p$  et  $\|F_i\|_p \leq C \| |x|_R f \|_p$ .*

Les coefficients  $\int f_0, \int f_0 x_i$ , et plus en général  $\int f_0 x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ , sont appelés **moments** de la fonction  $f_0$ .

Nous présentons maintenant notre résultat principal, montrant comment estimer la solution de (57) en temps grand à partir des moments de la donnée initiale.

**Théorème 3.12.** Soit  $f_0 \in L^1(G, 1 + |x|_R)$  tel que  $|x|_R f, |x|_R^2 f \in L^p(G)$  avec  $p < \frac{Q}{Q-1}$ , et  $f(t)$  la solution de (57). Alors, pour  $q$  satisfaisant  $p \leq q \leq \infty$ , il existe  $C$ , indépendant de  $t$  et de  $f_0$ , tel que

$$\|f(t) - \left( (f f_0) P_t + \sum_{i=1}^n (f f_0 x_i) X^i(P_t) \right)\|_q \leq C t^{-Q((1/p)-(1/q))/2-1} \| |x|^{k+1} f_0 \|_p.$$

Observons que le terme de droite converge vers 0 pour  $t$  qui tend vers l'infini. Ce résultat montre donc que, pour évaluer la solution en temps grand de l'équation de la chaleur hypoelliptique  $(\partial_t - \Delta_H) f = 0$  avec une donnée initiale  $f_0$ , la contribution la plus importante est donnée par  $P_t$ , ses dérivées  $X^1 P_t, \dots, X^n P_t$  dans  $\mathfrak{L}_1$  (cas  $w^i = 1$ ) et, en général, par les termes qui ont un petit degré d'homogénéité. Cela est une conséquence directe de l'anisotropie de la diffusion sur les groupes de Carnot.

Pour donner une idée de l'utilisation du résultat précédent, nous l'appliquons à l'étude de l'équation de la chaleur sur le groupe d'Heisenberg défini dans l'exemple 3.4. Le Laplacien  $\Delta_H$  est la somme des carrés

$$\Delta_H \phi = \left( (X^1)^2 + (X^2)^2 \right) \phi.$$

L'expression explicite de  $P_t$  a été calculée dans [70, 88] :

$$P_t(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi t)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\tau}{\text{Sinh}(2\tau)} \exp\left(-\frac{\tau(x^2 + y^2)}{2t \text{Tanh}(2\tau)}\right) \cos\left(\frac{z\tau}{t}\right)$$

Nous considérons une donnée initiale  $f_0 \in L^1(H_2, 1 + |x|_R)$  avec  $|x|_R f_0, |x|_R^2 f_0 \in L^p$  pour  $p = 1$ . Alors  $f_0$  satisfait les hypothèses du Théorème 3.11. Le calcul des moments se fait de la façon suivante

$$\begin{aligned} A_0 &:= \int_{H_2} f_0(x, y, z) dx dy dz, \\ A_1 &:= \int_{H_2} f_0(x, y, z) x dx dy dz, \quad A_2 := \int_{H_2} f_0(x, y, z) y dx dy dz. \end{aligned}$$

Nous appliquons le Théorème 3.12 avec  $q = \infty$ , qui donne l'expression en temps grand de la solution de (57) sur  $H_2$  :

$$f(t) = A_0 P_t + A_1 X^1(P_t) + A_2 X^2(P_t) + O(t^{-2/p-1}).$$

### 3.1.3 Noyaux de la chaleur sur les groupes (2,3,4) et (2,3,5)

Dans cette section, nous nous intéressons au calcul du noyau de la chaleur hypoelliptique sur deux groupes de Lie nilpotents  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$ , avec vecteurs de croissance (2, 3, 4) et (2, 3, 5), respectivement. Nous rappelons d'abord une méthode de calcul des noyaux de la chaleur que nous avons développée avec nos collaborateurs, voire [3]. Elle est basée sur la transformée de Fourier généralisée. Ensuite, nous définissons précisément les groupes  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$  et appliquons cette méthode pour calculer les noyaux de la chaleur.

## Calcul du noyau de la chaleur par transformée de Fourier généralisée

Dans cette section, nous rappelons brièvement la définition de la transformée de Fourier généralisée (GFT dans la suite) et la méthode pour le calcul des noyaux de la chaleur hypoelliptiques. Pour plus de détails, voire [3].

Nous rappelons d'abord la définition de la GFT. Il est bien connu maintenant que la transformée de Fourier se généralise à une large classe de groupes (voire par exemple [41, 60, 84, 85, 94, 138]). Nous présentons la généralisation pour les groupes de Lie unimodulaires de Type I. Voire les définitions dans [55]. Pour notre étude, il est suffisant de savoir que les groupes  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$  sont unimodulaires de Type I.

Soit donc  $G$  un groupe de Lie unimodulaire de Type I et  $\hat{G}$  son dual<sup>11</sup>, qui est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de  $G$ . Pour chaque  $\lambda \in \hat{G}$ , nous dénotons avec  $\mathfrak{X}^\lambda$  un choix d'une représentation irréductible dans la classe  $\lambda$ . Par définition,  $\mathfrak{X}^\lambda$  est une fonction associant à chaque élément de  $G$  un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert complexe et séparable  $\mathbb{H}^\lambda$  :

$$\mathfrak{X}^\lambda : \begin{array}{ll} G & \rightarrow U(\mathbb{H}^\lambda) \\ g & \mapsto \mathfrak{X}^\lambda(g). \end{array}$$

L'index  $\lambda$  dans  $\mathbb{H}^\lambda$  spécifie le fait que l'espace de Hilbert peut varier avec  $\lambda$ .

L'ensemble  $\hat{G}$  n'est pas un groupe, en général. Pour nos exemples  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$ ,  $\hat{G}$  a la structure de  $\mathbb{R}^n$  pour quelque  $n$ . Il est doté d'une mesure  $dP(\lambda)$ , dite mesure de Plancherel.

La définition de la GFT d'une fonction est la suivante.

**Définition 3.13.** *Soit  $G$  un groupe de Lie unimodulaire de Type I et  $f \in L^1(G, \mathbb{C})$ . La GFT de  $f$  est la fonction  $\hat{f}$  qui associe à chaque élément de  $\hat{G}$  l'opérateur linéaire  $\mathcal{H}^\lambda$  :*

$$\hat{f}(\lambda) := \int_G f(g) \mathfrak{X}^\lambda(g^{-1}) d\mu. \quad (58)$$

Il existe aussi une formule pour la GFT inverse, qui est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.14.** *Soit  $G$  un groupe de Lie unimodulaire de Type I et  $f \in L^1(G, \mathbb{C}) \cap L^2(G, \mathbb{C})$ . Pour tout  $g \in G$  nous avons*

$$f(g) = \int_{\hat{G}} Tr(\hat{f}(\lambda) \circ \mathfrak{X}^\lambda(g)) dP(\lambda). \quad (59)$$

La GFT se généralise aussi aux opérateurs différentiels. En particulier, nous nous intéressons à l'équation de la chaleur avec Laplacien hypoelliptique sur une variété sous-Riemannienne invariante à gauche. Nous avons le résultat suivant.

---

11. Ici, nous considérons que le dual est le support de la mesure de Plancherel dans l'espace des représentations irréductibles non-équivalentes de  $G$ ; nous ignorons donc les représentations singulières.

**Théorème 3.15.** Soit  $G$  un groupe de Lie unimodulaire de Type I, et  $(G, \mathbf{\Delta}, \mathbf{g})$  une variété sous-Riemannienne invariante à gauche engendrée par la base orthonormée  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$ . Soit  $\Delta_H = L_{X_1}^2 + \dots + L_{X_m}^2$  le Laplacien intrinsèque, avec  $L_{X_i}$  dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs  $X_i := \mathbf{g}\mathbf{p}_i$ .

Soit  $\hat{G}$  le dual de  $G$ . Nous avons la décomposition suivante :

- (i) La GFT de  $\Delta_H$  se sépare dans la somme de Hilbert d'opérateurs  $\hat{\Delta}_H^\lambda$ , chacun laissant  $\mathbb{H}^\lambda$  invariant :

$$\hat{\Delta}_H = \mathcal{F}\Delta_H\mathcal{F}^{-1} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \hat{\Delta}_H^\lambda dP(\lambda), \quad \text{avec} \quad \hat{\Delta}_H^\lambda = \sum_{i=1}^m \left( \hat{X}_i^\lambda \right)^2. \quad (60)$$

- (ii) L'opérateur  $\hat{\Delta}_H^\lambda$  est auto-adjoint et il est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $e^{t\hat{\Delta}_H^\lambda}$ .

- (iii) Le noyau de la chaleur est donné par

$$p_t(g) = \int_{\hat{G}} \text{Tr} \left( e^{t\hat{\Delta}_H^\lambda} \mathfrak{X}^\lambda(g) \right) dP(\lambda), \quad t > 0. \quad (61)$$

Un corollaire utile nous donne une formule simple pour le noyau de la chaleur dans le cas où chaque opérateur  $e^{t\hat{\Delta}_H^\lambda}$  admet une solution fondamentale  $Q_t^\lambda(\cdot, \cdot)$ .

**Corollaire 3.16.** Sous les hypothèses du Théorème 3.15, si pour tout  $\lambda \in \hat{G}$  il vaut  $\mathbb{H}^\lambda = L^2(X^\lambda, d\theta^\lambda)$  pour quelques espaces de mesure  $(X^\lambda, d\theta^\lambda)$  et

$$\left[ e^{t\hat{\Delta}_H^\lambda} \psi^\lambda \right] (\theta) = \int_{X^\lambda} \psi^\lambda(\bar{\theta}) Q_t^\lambda(\theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta},$$

alors

$$p_t(g) = \int_{\hat{G}} \int_{X^\lambda} \mathfrak{X}^\lambda(g) Q_t^\lambda(\theta, \bar{\theta}) \Big|_{\theta=\bar{\theta}} d\bar{\theta} dP(\lambda), \quad (62)$$

où dans la dernière formule l'opérateur  $\mathfrak{X}^\lambda(g)$  agit sur  $Q_t^\lambda(\theta, \bar{\theta})$  comme fonction de  $\theta$ .

Dans la suite, nous appliquons cette méthode et le Corollaire 3.16 aux cas particuliers de  $\mathfrak{G}_4$  et  $\mathfrak{G}_5$ .

**Le groupe  $\mathfrak{G}_4$  et son noyau de la chaleur** Nous décrivons maintenant le groupe  $\mathfrak{G}_4$  et donnons sa présentation dans  $\mathbb{R}^4$ . Nous définissons ensuite une structure sous-Riemannienne invariante à gauche et le Laplacien associé. Enfin, nous rappelons les représentations de  $\mathfrak{G}_4$  et calculons le noyau de la chaleur hypoelliptique à l'aide de la GFT et du Corollaire 3.16.

Soit  $\mathfrak{G}_4$  le groupe nilpotent avec vecteur de croissance  $(2, 3, 4)$ . Son algèbre de Lie est  $\mathfrak{L}_4 = \text{span} \{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4\}$ , avec les règles de commutation suivantes

$$[\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2] = \mathfrak{l}_3, \quad [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_3] = \mathfrak{l}_4, \quad [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_4] = [\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3] = [\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_4] = [\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4] = 0.$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}_4$  admet la présentation suivante dans l'espace des matrices :

$$\mathfrak{L}_4 \simeq \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & -a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque vecteur  $\mathfrak{l}_i$  est présenté avec la matrice  $a_j = \delta_{ij}$ . En conséquence, la présentation matricielle du groupe  $\mathfrak{G}_4$  est l'exponentiel de  $\mathfrak{L}_4$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_4 &\simeq \left\{ \exp \left( \begin{array}{cccc} 0 & -a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 1 & -x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_4 \\ 0 & 1 & -x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

avec

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3 - \frac{a_1 a_2}{2}, \quad x_4 = a_4 + \frac{a_1^2 a_2}{6} - \frac{a_1 a_3}{2}.$$

Cela donne un isomorphisme avec  $\mathbb{R}^4$  doté du produit suivant, voire [54, p. 330] :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) &:= \\ &\left( x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - x_1 y_2, x_4 + y_4 + \frac{1}{2} x_1^2 y_2 - x_1 y_3 \right) \end{aligned}$$

Cela donne aussi un isomorphisme d'espaces tangents, qui est explicitement  $g\mathfrak{l}_i \simeq X_i$ , avec les  $X_i$  suivants

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & X_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, & X_4(x) &= \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned} \quad (63)$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Nous dotons  $\mathfrak{G}_4$  de la structure sous-Riemannienne invariante à gauche en utilisant la Définition 3.3 et en choisissant  $\{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}$  base orthonormée. Pour le calcul des géodésiques de cette structure, voire [9]. Le groupe  $\mathfrak{G}_4$  est nilpotent et donc unimodulaire ; en conséquence le Laplacien hypoelliptique  $\Delta_H$  est la somme des carrés, voire Proposition 3.7. Nous cherchons la solution fondamentale de l'équation de la chaleur suivante sur  $\mathfrak{G}_4$  :

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta_H \phi(t, x). \quad (64)$$

Nous utilisons maintenant la GFT et le Corollaire 3.16 pour calculer la solution fondamentale. Nous rappelons que  $\mathfrak{G}_4$  est unimodulaire de Type I, et que ses représentations de  $\mathfrak{G}_4$  ont été calculées par Dixmier dans [54, p. 333].

**Proposition 3.17.** *Le dual de  $\mathfrak{G}_4$  est  $\hat{G} = \{\mathfrak{X}^{\lambda,\mu} \mid \lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{R}\}$ , avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \mathfrak{X}^{\lambda,\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4) : \psi(\theta) &\mapsto \exp i \left( -\frac{\mu}{2\lambda}x_2 + \lambda x_4 - \lambda x_3\theta + \frac{\lambda}{2}x_2\theta^2 \right) \psi(\theta + x_1) \end{aligned}$$

qui a comme domaine<sup>12</sup>  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . La mesure de Plancherel est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Etant donné les représentations  $\mathfrak{X}^{\lambda,\mu}$  de  $\mathfrak{G}_4$  et  $d\mathfrak{X}_i^{\lambda,\mu}$  les représentations correspondantes des opérateurs différentiels  $L_{X_i}$  avec  $i = 1, 2$ , nous avons

$$\left[ d\mathfrak{X}_1^{\lambda,\mu} \psi \right] (\theta) = \frac{d}{d\theta} \psi(\theta), \quad \left[ d\mathfrak{X}_2^{\lambda,\mu} \psi \right] (\theta) = \left( -\frac{i}{2} \frac{\mu}{\lambda} + \frac{i}{2} \lambda \theta^2 \right) \psi(\theta),$$

voire [54, p. 333]. La GFT de l'équation de la chaleur (64) est donc

$$\partial_t \psi = \left( \frac{d^2}{d\theta^2} - (\alpha\theta^2 + \beta)^2 \right) \psi(\theta), \quad (65)$$

avec  $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ ,  $\beta = -\frac{\mu}{2\lambda}$ . L'opérateur à droite est le Laplacien avec potentiel quartique, voire par exemple [133]. Etant donné qu'aucune solution générale explicite de cette équation n'est connue, nous appelons  $\Psi_t(\theta, \bar{\theta}; \alpha, \beta)$  la solution de

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \theta) = \left( \frac{d^2}{d\theta^2} - (\alpha\theta^2 + \beta)^2 \right) \psi(t, \theta), \\ \psi(0, \theta) = \delta_{\bar{\theta}}. \end{cases} \quad (66)$$

Appliquons maintenant le Corollaire 3.16, qui nous donne le noyau de la chaleur suivant sur  $\mathfrak{G}_4$  :

$$p_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} d\mu \int_{\mathbb{R}} d\theta e^{i \left( -\frac{\mu}{2\lambda}x_2 + \lambda x_4 - \lambda x_3\theta + \frac{\lambda}{2}x_2\theta^2 \right)} \Psi_t(\theta + x_1, \theta; \frac{\lambda}{2}, -\frac{\mu}{2\lambda}).$$

Ce résultat ne donne pas une forme explicite du noyau de la chaleur, car  $\Psi$  est une fonction non connue explicitement. Cependant, le fait de connecter un problème hypoelliptique sur  $\mathfrak{G}_4$  à un problème elliptique dans  $\mathbb{R}$  est une avancée, car il est maintenant possible d'estimer le noyau  $p_t$ , formellement ou numériquement, à partir de toute estimation disponible de  $\Psi$ . Voir par exemple [133].

**Le groupe  $\mathfrak{G}_5$  et son noyau de la chaleur** Nous répétons la même procédure décrite auparavant pour le groupe  $\mathfrak{G}_5$  avec vecteur de croissance  $(2, 3, 5)$ . Son algèbre de Lie est  $\mathfrak{L}_5 = \text{span} \{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4, \mathfrak{l}_5\}$ , avec les règles de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2] &= \mathfrak{l}_3, \quad [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_3] = \mathfrak{l}_4, \quad [\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3] = \mathfrak{l}_5, \\ [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_4] &= [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_5] = [\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_4] = [\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_5] = [\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4] = [\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_5] = [\mathfrak{l}_4, \mathfrak{l}_5] = 0. \end{aligned}$$

12. Nous considérons ici le produit classique  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}} \psi_1(\theta) \overline{\psi_2(\theta)} d\theta$  avec  $d\theta$  mesure de Lebesgue.

Pour  $\mathfrak{G}_5$  aussi il est possible de trouver une présentation par l'exponentiel des matrices de  $\mathfrak{L}_5$ , voire [R9]. De même,  $\mathfrak{G}_5$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^5$  doté du produit suivant (voire [54, p. 331]) :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - x_1 y_2, x_4 + y_4 + \frac{1}{2} x_1^2 y_2 - x_1 y_3, x_5 + y_5 + \frac{1}{2} x_1 y_2^2 - x_2 y_3 + x_1 x_2 y_2).$$

L'isomorphisme des groupes induit un isomorphisme des espaces tangents, qui est explicitement  $g\mathfrak{l}_i \simeq X_i$ , avec  $X_i$  donné par

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & X_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ X_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_5}, & X_4(x) &= \frac{\partial}{\partial x_4}, & X_5(x) &= \frac{\partial}{\partial x_5}, \end{aligned} \quad (67)$$

avec  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

Nous définissons une structure sous-Riemannienne invariante à gauche sur  $\mathfrak{G}_5$  en utilisant la Définition 3.3 et en choisissant  $\{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}$  base orthonormée. Nous cherchons donc l'expression de la solution fondamentale de

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta_H \phi(t, x), \quad (68)$$

sur  $\mathfrak{G}_5$ , avec  $\Delta_H = X_1^2 + X_2^2$ . Nous utilisons les représentations du groupe  $\mathfrak{G}_5$ , calculées par Dixmier en [54, p. 338], paramétrées par  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  avec  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$  et nous appliquons la GFT et le Corollaire 3.16. Nous trouvons l'expression suivante pour le noyau de la chaleur sur le groupe  $\mathfrak{G}_5$  :

$$p_t(x) = \int_{\lambda^2 + \mu^2 \neq 0} d\lambda d\mu d\nu \int_{\mathbb{R}} d\theta \exp i K_x^{\lambda, \mu, \nu}(\theta) \Psi_{\frac{t}{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \theta + \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda^2 + \mu^2}, \theta; \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}, -\frac{\nu}{2} \right),$$

où

$$\begin{aligned} K_x^{\lambda, \mu, \nu}(\theta) &= -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\lambda^2 + \mu^2} (\mu x_1 - \lambda x_2) + \lambda x_4 + \mu x_5 + \frac{1}{2} (\lambda^2 + \mu^2) (\mu x_1 - \lambda x_2) \theta^2 + \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} (\lambda^2 x_1^3 + 3\lambda \mu x_1^2 x_2 + 3\mu^2 x_1 x_2^2 - \lambda \mu x_2^3) + \mu^2 x_1 x_2 \theta + \lambda \mu (x_1^2 - x_2^2) \theta. \end{aligned}$$

et  $\Psi_s$  est la solution de (66).

## 3.2 Etude du modèle d'imagerie de Petitot

Dans cette section, nous présentons d'abord le modèle de Petitot pour le cortex visuel et son utilisation dans le problème de la reconstruction d'images. Ce modèle est écrit en termes d'un problème de commande optimale dans l'espace des points du plan avec direction. Nous exposons ensuite nos résultats récents sur ce sujet, et notamment l'étude de l'existence ou pas d'une solution (globale ou locale) au problème de commande entre deux configurations données.

Le modèle de Petitot, décrit en détail dans [116, 117, 118], souhaite répondre à la question suivante : étant donné une courbe dans le plan dont une petite partie a été effacée, comment notre cerveau la reconstruit-il ? Voir Figure 4.

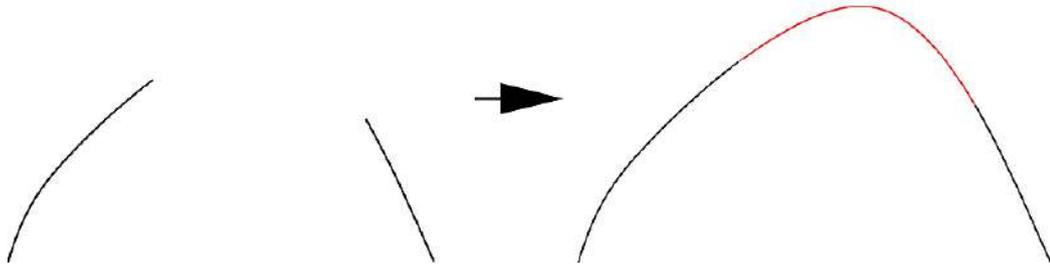


FIGURE 4 – Reconstruction d’une courbe avec une partie effacée.

Ce modèle se base sur deux observations, vérifiées expérimentalement sur des cerveaux de primates. La première est due à Hubel et Wiesel (Prix Nobel de Médecine en 1981), voire [87] : une courbe dans le champ visuel est codée par rapport à sa **position** et à sa **direction** en chaque point. Une courbe  $(x(\cdot), y(\cdot))$  est donc transformée en une courbe  $(x(\cdot), y(\cdot), \theta(\cdot))$  dans l’espace  $SE(2) := \mathbb{R}^2 \times S^1$  où  $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi)$ , avec  $\theta(t) \in S^1$  direction de la courbe dans  $(x(t), y(t))$ . La deuxième observation est que deux groupes de neurones du cortex sont fortement connectés entre eux si les configurations correspondantes dans l’espace  $SE(2)$  sont proches aussi bien dans l’espace  $x, y$  que dans la direction  $\theta$ . Voir [46] et un exemple de ce phénomène en Figure 5.



FIGURE 5 – Un individu connecte facilement les configurations avec des angles proches (gauche), alors qu’il ne perçoit pas de connexion si les angles sont trop écartés (droite). D’après [92].

Le modèle de Petitot introduit donc un coût d’une courbe plane  $\gamma$  de la forme suivante

$$C(\gamma) := \int_0^\ell \|\dot{\gamma}\| \sqrt{1 + \beta^2 K_\gamma} ds, \quad (69)$$

où  $\ell$  est la longueur (libre) de la courbe et  $K_\gamma$  est sa courbature géodésique. Le paramètre  $\beta$  donne le poids relatif longueur/courbure. Pour simplifier, nous fixons  $\beta = 1$  dans la suite. Ce coût permet ensuite de définir une distance dans l’espace  $SE(2)$  comme suit :

$$d((x, y, \theta), (x', y', \theta')) := \inf \left\{ C(\gamma) \mid \begin{array}{l} \gamma(0) = (x, y), \quad \text{dir}(\dot{\gamma}(0)) = \theta, \\ \gamma(1) = (x', y'), \quad \text{dir}(\dot{\gamma}(1)) = \theta' \end{array} \right\},$$

où la direction d'un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  est l'angle  $\theta$  dans  $S^1$  satisfaisant  $v = \|v\|(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . La minimisation de  $C(\gamma)$  peut être écrite dans la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$\int_0^T \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} dt \rightarrow \min, \quad (71)$$

ou la commande  $u$  correspond à la norme du vecteur  $\dot{\gamma}$  et  $v$  le produit  $|\dot{\gamma}|K_\gamma$  dans (69). Il s'agit bien d'un problème de géométrie sous-Riemannienne invariant à gauche sur le groupe  $SE(2)$  en choisissant les vecteurs  $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  et  $(0, 0, 1)$  comme une base orthonormée, voir Section 3.1.1. Pour cette raison, le problème (70)-(71) admet les mêmes solutions si on étudie le problème avec  $T$  libre ou fixé, car le coût est invariant par reparamétrisation du temps. De plus, pour toute paire de configurations initiale  $(x_0, y_0, \theta_0)$  et finale  $(x_1, y_1, \theta_1)$ , il existe une solution du problème (70)-(71). Ces solutions ont été trouvées explicitement par notre collaborateur Y. Sachkov dans [109, 130, 131].

Cependant, les courbes  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  projections des solutions

$$q(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$$

de (70)-(71) peuvent présenter des points de rebroussement, voire Figure 6. Cela peut s'expliquer par le fait que nous n'avons pas imposé la condition  $u > 0$  dans le problème de commande (70)-(71), ce qui est naturel si on considère que la courbe plane  $\gamma$  doit satisfaire  $|\dot{\gamma}(t)| > 0$  pour tout temps pour avoir existence de la direction  $\text{dir}(\dot{\gamma}(t))$ .

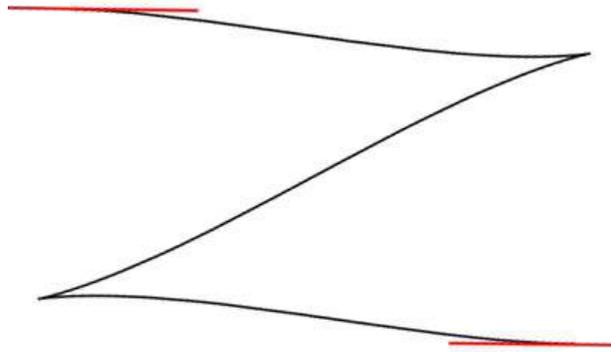


FIGURE 6 – Projection d'un minimisant avec deux points de rebroussement.

Le fait de rajouter la contrainte  $u > 0$  transforme profondément le problème (70)-(71). En effet, toute solution de ce problème peut se reparamétriser pour satisfaire la condition  $u = 1$ . Si nous revenons au modèle original de Petitot dans l'espace des courbes planes, le problème devient la recherche des minimisants du coût

$$C'(\gamma) := \int_0^\ell \sqrt{1 + K_\gamma} ds, \quad (72)$$

ce qui correspond à imposer la condition  $|\dot{\gamma}(t)| = 1$  dans (69). En termes de commande optimale, nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (73)$$

$$(x(0), y(0), \theta(0)) = (x_0, y_0, \theta_0), \quad (x(T), y(T), \theta(T)) = (x_1, y_1, \theta_1) \quad (74)$$

$$J(v) := \int_0^T \sqrt{1 + v(t)^2} dt \rightarrow \min. \quad (75)$$

C'est le problème (70)-(71) sous la contrainte  $u = 1$ . L'avantage de ce problème est que les projections de ses solutions ne présentent pas de points de rebroussement. Par contre, nous ne sommes pas assurés de l'existence d'une solution pour toute paire de configurations initiale et finale.

Les questions que nous nous posons sont donc les suivantes. **Etant donné une paire de configurations initiale et finale, existe-t-il un minimisant global de (73)-(74)-(75) ? Existe-t-il un minimisant local ? Existe-t-il une géodésique ?**

Il est nécessaire de rappeler la signification précise des termes ici employés. Pour simplifier, nous rappelons ces définitions pour le problème (73)-(74)-(75). Les définitions générales se trouvent dans [R10].

Nous introduisons d'abord l'espace des courbes de (73) avec temps final libre.

**Définition 3.18.** Soit  $q_1(\cdot), q_2(\cdot) \in \cup_{T>0} W^{1,1}([0, T], M)$  deux courbes, avec  $q_1$  définie dans  $[0, T_1]$  et  $q_2$  dans  $[0, T_2]$ . Définissons  $T := \max\{T_1, T_2\}$  et étendons  $q_1$  sur l'intervalle  $[0, T]$  en imposant  $q_1(t) := q_1(T_1)$  pour  $t > T_1$ , et pareil pour  $q_2$ . Nous définissons la distance entre  $q_1(\cdot)$  et  $q_2(\cdot)$  comme suit

$$\|q_1(\cdot) - q_2(\cdot)\|_{W^{1,1}} := |q_1(0) - q_2(0)| + \|\dot{q}_1(\cdot) - \dot{q}_2(\cdot)\|_{L^1}. \quad (76)$$

Nous dotons l'espace  $\cup_{T>0} W^{1,1}([0, T], M)$  de la topologie induite par la distance (76).

Nous avons les définitions suivantes.

**Définition 3.19.** Une paire  $(q(\cdot), v(\cdot))$  avec  $q(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$  est un **minimisant global** de (73)-(75) si elle est une solution de (73)-(75).

La paire  $(q(\cdot), v(\cdot))$  est un **minimisant local** s'il existe un ouvert  $B_q(\cdot)$  dans l'espace  $\cup_{T>0} W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^m)$  tel que pour tout  $(\bar{q}(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in B_q(\cdot)$  satisfaisant (73)-(74) nous avons aussi  $J(\bar{v}(\cdot)) \geq J(v(\cdot))$ .

La paire  $(q(\cdot), v(\cdot))$  est une **géodésique** si pour tout intervalle  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  suffisamment petit, la paire  $(q(\cdot), v(\cdot))|_{[t_1, t_2]}$  est solution de (73)-(74)-(75) entre  $q(t_1)$  et  $q(t_2)$ .

Ces différentes définitions de minimisants sont intéressantes, car la simple non-existence d'un minimisant global n'est pas cruciale pour le modèle de Petitot. En effet, dans ce modèle du cortex visuel on ne peut comparer que des trajectoires proches, et en conséquence ne rechercher que des minimisants locaux.

Notre résultat principal montre que, pour le problème (73)-(74)-(75), l'existence d'un type de minimisant est équivalente à l'existence des deux autres. Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.20.** *Soit donné une paire de configurations initiale  $q_0$  et finale  $q_1$  pour le problème (73)-(74)-(75). Seul l'un des deux cas suivants est possible :*

- *soit il existe un minimisant global de  $q_0$  à  $q_1$ , qui est aussi minimisant local et géodésique ;*
- *soit il n'existe ni un minimisant global de  $q_0$  à  $q_1$ , ni un minimisant local, ni une géodésique.*

*Idée de la preuve.* La preuve se base sur deux aspects assez fins de commande optimale. Le premier aspect est l'étude détaillée des solutions du problème original (70)-(71) et de la présence de points de rebroussement. En effet, il est facile de démontrer que tout minimisant (global, local, géodésique) pour (70)-(71) sans points de rebroussement est un minimisant (global, local, géodésique) pour (73)-(75), voire Section 5 de [R10]. De plus, nous observons que si l'un des minimisants globaux pour (70)-(71) de  $q_0$  à  $q_1$  a un point de rebroussement, alors tous les minimisants globaux, tous les minimisants locaux et toutes les géodésiques ont des points de rebroussement. Cela implique directement la non-existence de minimisants (global, local, géodésique) pour (73)-(75) de  $q_0$  à  $q_1$ .

Le deuxième aspect fin de cette étude est donné par l'utilisation d'un PMP généralisé pour le problème (73)-(75), voire [146, Thm. 8.2.1]. En général, la commande d'un problème est définie dans l'espace  $L^1([0, T], U)$  où  $U$  est l'espace des commandes admissibles. Cependant, le PMP classique nous permet de trouver les commandes optimales dans l'espace plus petit  $L^\infty([0, T], U)$ . Cet écart est souvent résolu (notamment en géométrie Riemannienne et sous-Riemannienne) en cas d'invariance du coût par reparamétrisation, voire notre article [22].

Mais le problème (73)-(75) n'admet pas d'invariance du coût par reparamétrisation, ce qui nous oblige à calculer les minimisants de (73)-(75) avec le PMP généralisé. Nous prouvons quand-même que toute solution du PMP généralisé en  $L^1$  pour (73)-(75) peut se transformer en une solution du PMP classique en  $L^\infty$  pour (70)-(71).  $\square$

Nous avons aussi calculé numériquement les conditions initiales et finales qui admettent des minimisants pour (73)-(75). Etant donné que le coût d'une courbe est invariant par roto-translations dans le plan  $(x, y)$ , nous pouvons considérer que la configuration initiale est le point  $(0, 0)$  avec direction horizontale. En Figure 7 nous montrons pour chaque point  $(x, y)$  du plan les directions  $\theta$  pour lesquelles nous avons l'existence d'une solution pour (73)-(75) avec condition initiale  $(0, 0, 0)$  et condition finale  $(x, y, \theta)$ .

Ce résultat fait partie d'un grand effort de collaboration dans le but d'une meilleure compréhension du modèle de Petitot et de son utilisation pour les problèmes d'imagerie, notamment pour la reconstruction d'images corrompues. Nos travaux sur le modèle de Petitot avaient commencé pendant ma thèse, voire [22], et nous nous étions aussi intéressés à son utilisation en imagerie, voire [25]. En particulier, nous avons utilisé le lien profond (expliqué en Section 3.1) entre les solutions du problème sous-Riemannien (70)-(71) et l'EDP

$$\partial_t f = ((\cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y)^2 + \partial_t^2)f. \quad (77)$$

Cette EDP de la chaleur hypoelliptique (voire Section 3.1), peut être utilisée dans la reconstruction d'images par diffusion. L'idée de base est que la reconstruction par

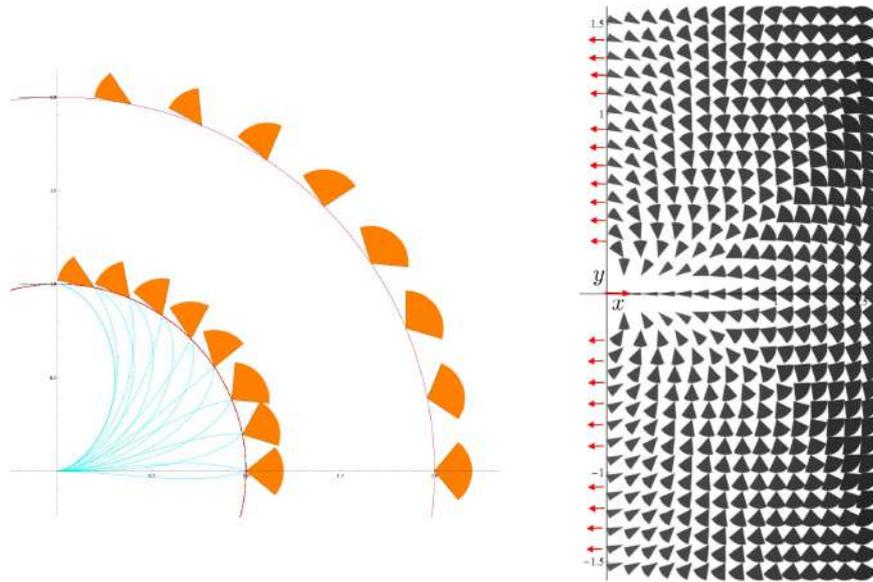


FIGURE 7 – Configurations ayant existence de minimisants pour (73)-(75), avec  $\beta = 1$ .

cette EDP est la version fonctionnelle de la reconstruction de courbes par le modèle de Petitot.

Nous avons donc défini un algorithme de reconstruction d’images dans [25], qui a ensuite été amélioré par nos collaborateurs dans [23, 26]. Voir plusieurs exemples de reconstruction d’images en Figure 8.

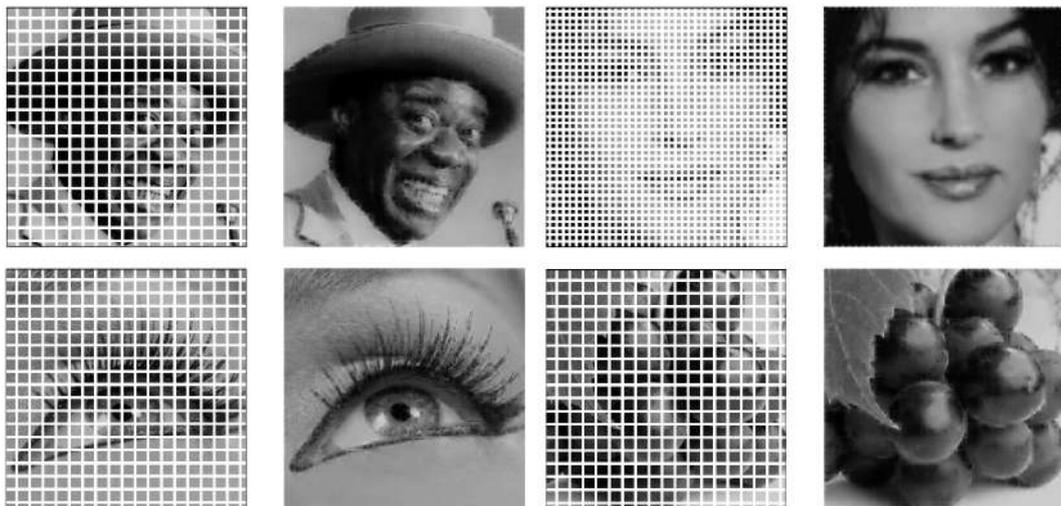


FIGURE 8 – Reconstruction d’images par l’algorithme de [23, 26].

Le but est maintenant de créer un “cortex visuel artificiel”, c’est-à-dire un ensemble matériel-logiciel capable de mimer plusieurs fonctionnalités du cortex visuel humain. La création d’un prototype est en cours, et le montage d’une start-up en collaboration avec J.-P. Gauthier, U. Boscain, M. Sigalotti, D. Prandi et L. Suriano

est envisagée.

### 3.3 Commandabilité des systèmes quantiques

Dans cette section, nous présentons des résultats de commande pour un système quantique fermé commandé par des champs extérieurs (des lasers, par exemple). Nous considérons un système en dimension finie, affine en commande, et nous étudions ses propriétés de commandabilité. En particulier, nous prouvons que la commandabilité approchée et la commandabilité exacte sont équivalentes.

Un premier intérêt de ce résultat est qu'il existe des exemples de systèmes pour lesquels il est facile d'évaluer la commandabilité approchée, voire [1, 24, 75], et pour lesquels notre résultat implique directement la commandabilité exacte. Un deuxième intérêt de notre contribution est l'ensemble des instruments utilisés dans la preuve, qui sont des résultats profonds de la théorie des représentations des groupes de Lie. Pour une panoramique de cette théorie, voire [12, 56].

Considérons un système quantique fermé de la forme

$$i\dot{\psi}(t) = H(u(t))\psi(t) = (H_0 + u_1(t)H_1 + \cdots + u_m(t)H_m)\psi(t), \quad (78)$$

où  $\psi(\cdot)$  décrit l'état du système, qui évolue sur la sphère unitaire  $\mathcal{S}$  d'un espace de Hilbert complexe en dimension finie  $\mathcal{H}$ . Les commandes  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$  prennent leurs valeurs dans un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  et elles représentent des champs extérieurs. Le Hamiltonien  $H(u)$  est un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$  pour tout  $u \in U$ .

Nous nous intéressons en particulier à trois exemples significatifs pour la commande quantique : la sphère unitaire  $S^{2n-1}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , le groupe des matrices unitaires  $U(n)$  et son sous-groupe  $SU(n)$  des matrices spéciales unitaires.

Nous rappelons les définitions de base de la commandabilité.

**Définition 3.21.** *Le système (78) est exactement commandable si tout point de  $\mathcal{S}$  peut être porté à tout autre point de  $\mathcal{S}$  par une trajectoire admissible de (78).*

*Il est commandable de façon approchée si tout point de  $\mathcal{S}$  peut être porté dans un voisinage de tout autre point de  $\mathcal{S}$  par une trajectoire admissible de (78).*

Il est donc clair que la commandabilité exacte implique la commandabilité approchée. Notre but est donc de montrer que la commandabilité approchée implique la commandabilité exacte pour les systèmes de l'une des deux formes suivantes :

$$i\dot{\psi}(t) = H(u(t))\psi(t), \quad \psi(t) \in S^{2n-1}, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (79)$$

ou

$$i\dot{g}(t) = H(u(t))g(t), \quad g(t) \in \mathcal{G}, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (80)$$

où  $\mathcal{G}$  est le groupe  $SU(n)$  si la trace de  $H(u)$  est nulle pour tout  $u \in U$ , et  $U(n)$  autrement.

Notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 3.22.** *Le système (79) est commandable de façon approchée si et seulement s'il est exactement commandable. Le même résultat est valable pour (80).*

L'intérêt de notre contribution ne réside pas seulement dans le résultat principal, mais concerne aussi l'utilisation de la théorie des représentations dans la preuve. Pour cette raison, nous détaillons un certain nombre de résultats utiles, avant de donner une idée de la preuve du Théorème 3.22.

Avant tout, nous rappelons ce résultat classique de commande sur les systèmes invariants définis sur les groupes de Lie compacts, (voire [62] et [91, p. 155])

**Lemme 3.23.** *Soit  $M$  un groupe de Lie compact, et considérons un système de commande invariant à droite  $(\Sigma)$  sur  $M$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- $(\Sigma)$  est exactement commandable ;
- l'orbite  $G$  de  $(\Sigma)$  coïncide avec  $M$  ;
- $\text{Lie}\{f(e, u) \mid u \in U\}$  est l'algèbre de Lie de  $M$ .

La dernière condition est la *condition des crochets de Lie* (55), introduite pour les variétés sous-Riemanniennes en Section 3.1.1. Observons que dans les hypothèses de notre Théorème 3.22 nous n'assumons pas du tout la condition des crochets de Lie. Il est d'ailleurs bien connu que pour tout système, même non-linéaire, la commandabilité exacte et celle approchée coïncident si la condition des crochets de Lie est vérifiée.

Nous sommes déjà en mesure de prouver le Théorème 3.22 pour le système (80) dans le cas de  $\mathcal{G} = \text{SU}(n)$ . Utilisons d'abord ce résultat de 1942, dit de l'arc analytique.

**Théorème 3.24** ([134]). *Si un sous-groupe dense  $\tilde{G}$  d'un groupe de Lie simple  $G$  de dimension supérieure à 1 contient un arc analytique, alors  $\tilde{G} = G$ .*

La preuve du Théorème 3.22 suit, en observant que la commandabilité approchée implique que l'orbite de (80) est dense. L'orbite contient une trajectoire du système, qui est un arc analytique. Enfin,  $\text{SU}(n)$  est un groupe de Lie simple. Donc, l'orbite coïncide avec tout le groupe, et le Lemme 3.23 nous donne la commandabilité exacte.

Cette preuve ne peut pas se généraliser à  $\mathcal{G} = \text{U}(n)$ , car  $\text{U}(n)$  n'est pas simple. De plus, nous ne pouvons pas déduire le même résultat sur la sphère (79) à partir des résultats sur le groupe  $\mathcal{G}$ . En effet, il existe des exemples où la commandabilité sur la sphère est exacte sans avoir commandabilité sur le groupe. Voire par exemple le cas où l'algèbre de Lie engendrée par  $\{iH(u) \mid u \in U\}$  est l'algèbre  $\text{sp}(n/2)$  : nous avons commandabilité exacte de (79), sans avoir commandabilité (même pas approchée) de (80). Nous donnons donc plusieurs définitions et résultats profonds de la théorie des représentations dans le but de prouver le Théorème 3.22 dans les deux cas de la sphère  $S^{2n-1}$  et du groupe  $\text{U}(n)$ .

Rappelons d'abord que l'intersection des noyaux de toutes les représentations unitaires irréductibles en dimension finie d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$ . Le groupe  $G$  est dit *injectable dans un groupe compact* si ce sous-groupe est réduit à l'identité de  $G$ . Avec cette terminologie, nous avons le résultat suivant, dû à Dixmier.

**Théorème 3.25** ([56] 16.4.8). *Soit  $G$  un groupe de Lie connecté et localement compact. Alors  $G$  est injectable dans un groupe compact si et seulement si  $G = \mathbb{R}^p \times K$  avec  $p \geq 0$  et  $K$  groupe compact.*

L'autre élément fondamental de la preuve est dû à Weil, voire [150, p. 66].

**Proposition 3.26** ([56] 13.1.8). *Soit  $G = G_1 \times G_2$  le produit Cartésien de deux groupes topologiques localement compacts, et  $\mathfrak{X}$  une représentation irréductible de  $G$ . Définissons les représentations  $\mathfrak{X}'_1$  de  $G_1$  par  $\mathfrak{X}'_1(g_1) := \mathfrak{X}(g_1, e)$  et  $\mathfrak{X}'_2$  de  $G_2$  par  $\mathfrak{X}'_2(g_2) := \mathfrak{X}(e, g_2)$ . Si  $\mathfrak{X}'_1$  et  $\mathfrak{X}'_2$  font partie d'une classe semi-simple de représentations, alors  $\mathfrak{X}$  est équivalente au produit tensoriel  $\mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$  avec  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$  qui sont des représentations irréductibles de  $G_1, G_2$ , respectivement.*

Nous ne rappelons pas ici la définition d'une classe semi-simple de représentations, voire [150, p. 65]. Pour notre preuve, il suffit de remarquer que toute classe de représentations bornées est semi-simple, voire [150, p. 70].

Nous avons besoin aussi d'une propriété des représentations de  $\mathbb{R}^p$ . Etant donnée que toute représentation unitaire irréductible est un *caractère*, c'est-à-dire de la forme  $\chi_\xi(x) := e^{i\xi \cdot x}$  pour un  $\xi \in \mathbb{R}^p$  (voire [12, 6.1]), alors aucune représentation unitaire irréductible de  $\mathbb{R}^p$  n'est fidèle<sup>13</sup> pour  $p \geq 1$ . La même considération est valable pour les représentations bornées irréductibles.

Enfin, nous avons ce résultat connectant la commandabilité approchée aux représentations d'un groupe.

**Lemme 3.27.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $U(n)$  tel que  $Gz$  est dense dans  $S^{2n-1}$  pour tout  $z \in S^{2n-1}$ . Alors l'inclusion  $j : G \hookrightarrow U(n)$  est une représentations irréductible de  $G$ .*

*Idée de la preuve.* Si l'inclusion n'est pas irréductible, il existe un sous-espace  $h \subset \mathbb{C}^n$  invariant par  $G$ . Alors, pour  $z \in h$ , l'orbite  $Gz$  est contenue dans la sous-variété  $h \cap S^{2n-1}$ , et donc elle n'est pas dense dans  $S^{2n-1}$ .  $\square$

Nous sommes maintenant prêts pour donner une idée de la preuve du Théorème 3.22. Soit  $\tilde{G}$  l'orbite de (80), qui est un sous-groupe de  $U(n)$ . Considérons l'inclusion  $j : \tilde{G} \hookrightarrow U(n)$ , qui est évidemment une représentation fidèle de  $\tilde{G}$  sur  $\mathbb{C}^n$ , car  $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ . Donc  $\tilde{G}$  est injectable dans un groupe compact, et donc par le Théorème 3.25 il est de la forme  $\mathbb{R}^p \times K$ .

Tout autant pour le système (79) que pour le système (80) avec  $G = U(n)$ , la commandabilité approchée implique l'hypothèse du Lemme 3.27, qui à son tour assure que l'inclusion est une représentation irréductible de  $\tilde{G} = \mathbb{R}^p \times K$ . L'inclusion est donc décomposable en deux représentations  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  irréductibles de  $\mathbb{R}^p$  et  $K$ , respectivement, grâce à la Proposition 3.26. Mais  $\mathfrak{X}_1$  est une représentation bornée, fidèle et irréductible de  $\mathbb{R}^p$ , et donc  $p = 0$ . En conséquence,  $\tilde{G} = K$  est compact.

Le résultat pour le système (79) suit, en observant que  $\tilde{G}z$  est compact et dense dans  $S^{2n-1}$ , donc il coïncide avec  $S^{2n-1}$ , ce qui implique la commandabilité exacte grâce au Lemme 3.23. La même idée permet de conclure pour le système (80).

---

13. En théorie des représentations, le terme "fidèle" remplace le terme "injectif".

### 3.4 Préservation de fonctions de Lyapunov par l'approximation de Padé

Dans cette section, nous étudions la préservation des fonctions polyédrales de Lyapunov pour les systèmes linéaires en temps continu après discrétisation de la matrice de transition. Notre résultat principal montre que tout système linéaire en temps continu et toutes ses approximations de Padé (de n'importe quel ordre et pour tout temps d'échantillonnage) ont une fonction polyédrale de Lyapunov en commun.

Ce résultat naît de notre intérêt pour les systèmes hybrides, et notamment pour les systèmes à commutation, voire [120, 132, 152]. La théorie des systèmes à commutation est un sujet de recherche assez récent, et presque aucun résultat n'est connu quant aux propriétés partagées entre les systèmes en temps continu et leurs discrétisations. Il s'agit ici d'un problème majeur pour l'ingénierie moderne, où la simulation numérique joue un rôle de plus en plus important. En conséquence, plusieurs questions simples à ce sujet restent ouvertes.

L'une de ces questions concerne la préservation de la stabilité d'un système à commutation. Pour les systèmes linéaires invariants par rapport au temps, plusieurs discrétisations (dont l'approximation de Padé) préservent la stabilité par fonction de Lyapunov quadratique. Etant donné que l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique est équivalente à la stabilité pour ces systèmes, le problème est résolu. Mais, pour les systèmes à commutation, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique n'est qu'une condition suffisante de stabilité. Il faut donc élargir la classe de fonctions de Lyapunov préservées par la discrétisation pour en déduire la préservation de la stabilité.

Notre résultat est une première étape dans cette direction. Nous considérons l'approximation de Padé, qui est souvent utilisée dans les applications et étudiée d'un point de vue numérique, voire [17, 110, 149]. En particulier, l'approximation de Padé diagonale d'ordre 1 est connue sous le nom de transformation de Tustin ou transformation bilinéaire.

Nous nous intéressons à la classe des fonctions polyédrales, c'est-à-dire des fonctions avec courbes de niveau polyédrales et homogènes d'ordre 1 par rapport à la multiplication par un nombre réel positif. Il est bien connu<sup>14</sup> que la stabilité des systèmes à commutation avec dynamiques linéaires est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov polyédrale. Nous nous demandons quelles fonctions polyédrales sont conservées par quelles discrétisations (pour tout temps d'échantillonnage). Dans cette démarche, nous montrons que certaines fonctions polyédrales, introduites par Polanski en [121], sont préservées pour toute approximation de Padé. Nous avons prouvé ce résultat dans notre publication [R12] dans le cas d'une matrice de la dynamique linéaire avec valeurs propres distinctes, et généralisé à n'importe quelle structure de valeurs propres dans [R13].

Considérons le système linéaire autonome

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) \tag{81}$$

---

14. Il suffit d'approcher une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov par une courbe polyédrale.

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et assumons que le système soit asymptotiquement stable, et donc que la matrice  $A_c$  soit de Hurwitz<sup>15</sup>. La solution du système avec état initial  $x_0$  est donnée par  $x(t) = e^{A_c t} x_0$ . L'exponentiel de la matrice  $e^{A_c t}$  peut être approché de différentes façons, voire [110]. Ici, nous nous focalisons sur la plus populaire en ingénierie, qui est l'approximation diagonale de Padé d'ordre  $p$ , voire [17, 149]. Plus précisément, étant donné un temps d'échantillonnage  $h > 0$ , l'approximation de Padé d'ordre  $p$  pour  $e^{A_c h}$  est définie par

$$A_d(h) = Z(A_c h)Z(-A_c h)^{-1}, \quad (82a)$$

$$Z(X) = \sum_{i=0}^p c_i X^i, \quad c_i = \frac{(2p-i)!p!}{(2p)!i!(p-i)!}. \quad (82b)$$

Un cas particulier de l'approximation de Padé est la transformation de Tustin ou bilinéaire

$$A_d(h) = \left( I + \frac{h}{2} A_c \right) \left( I - \frac{h}{2} A_c \right)^{-1}. \quad (83)$$

En conséquence, nous pouvons associer au système (81) en temps continu, son approximation en temps discret

$$x_d(k+1) = A_d(h)x_d(k) \quad (84)$$

où  $x_d(k)$  approche  $x(kh) = (e^{A_c h k})x_0$ .

Il est bien connu que l'approximation de Padé préserve la stabilité des systèmes, et en effet  $A_c$  est de Hurwitz si et seulement si  $A_d$  est de Schur<sup>16</sup> pour tout choix du temps d'échantillonnage  $h > 0$ . De plus, les transformations des valeurs propres sont données par la même formule (82), avec les mêmes vecteurs propres. Enfin, la transformation de Padé ne dépend pas de la base.

Nous étudions maintenant la stabilité des dynamiques en termes de normes et de mesures de matrices. Pour toute matrice  $X$ , nous considérons la mesure dite  $\mu_\infty(X) = \max_i \left( X_{ii} + \sum_{j \neq i} |X_{ij}| \right)$  et la norme  $\|X\|_\infty = \max_i \sum_j |X_{ij}|$ , où les  $X_{ij}$  sont les entrées de  $X$ . Nous rappelons ce résultat utile, voire [93].

**Lemme 3.28.** *La matrice  $A_c$  est de Hurwitz si et seulement s'il existe une matrice avec rang maximal dans les colonnes  $W_c \in \mathcal{R}^{N \times n}$ ,  $N \geq n$ , et  $Q_c$  tel que*

$$W_c A_c = Q_c W_c, \quad \mu_\infty(Q_c) < 0. \quad (85)$$

*La matrice  $A_d$  est de Schur si et seulement s'il existe une matrice avec rang maximal dans les colonnes  $W_d \in \mathcal{R}^{N \times n}$ ,  $N \geq n$ , et  $Q_d$  tel que*

$$W_d A_d = Q_d W_d, \quad \|Q_d\|_\infty < 1. \quad (86)$$

**Remarque 3.29.** *Il est simple de vérifier que  $W_c A_c = Q_c W_c$  implique  $W_d(h) A_d(h) = Q_d(h) W_d(h)$  avec  $W_d(h) = W_c$  et  $Q_d(h) = Z(Q_c h)$ . Par contre, il n'est pas vrai en général que  $\mu_\infty(Q_c) < 0$  implique  $\|Q_d(h)\|_\infty < 1$ , voire [112].*

15. Toutes ses valeurs propres ont partie réelle négative.

16. Toutes ses valeurs propres ont une norme strictement inférieure à 1.

L'intérêt de ces deux résultats est que les matrices  $W_c$  et  $W_d$  définissent les fonctions de Lyapunov polyédrales suivantes :

$$L(x) := \|Wx\|_\infty \quad (87)$$

De plus, toute fonction de Lyapunov polyédrale convexe et homogène d'ordre 1 est de ce type, et donc la classe des fonctions de la forme (87) couvre tous les cas intéressants pour l'étude des systèmes linéaires.

Nous nous intéressons maintenant à la construction explicite des fonctions de Lyapunov de la forme (87), et donc des matrices  $W_c$  satisfaisant (85) et  $W_d$  satisfaisant (86). Nous rappelons d'abord les résultats suivants, donnant des formes explicites pour  $W_c$  et  $W_d$  en fonction des valeurs propres des matrices  $A_c$  et  $A_d$ , respectivement. Voir [121] pour les systèmes en temps continu et [43] pour les systèmes en temps discret.

**Lemme 3.30.** *Soit  $A_c$  une matrice de Hurwitz, avec  $n_r$  valeurs propres réelles négatives et  $2n_c$  valeurs propres complexes conjuguées. Pour toute paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_c$ , soit  $m_i$  un entier tel que  $\lambda_i$  se trouve dans le secteur  $\mathcal{S}_c(m_i)$ , avec*

$$\mathcal{S}_c(m) = \left\{ \lambda = -\alpha + j\beta : \alpha > 0, |\beta| < \frac{\sin(\frac{\pi}{m})}{1 - \cos(\frac{\pi}{m})} \alpha \right\}. \quad (88)$$

Alors il existe  $W_c \in \mathcal{R}^{N \times n}$  et  $Q_c \in \mathcal{R}^{N \times N}$ , avec  $N = \sum_{i=1}^k m_i + n_r$ , satisfaisant (85). ■

Nous montrons en Figure 9 les secteurs  $\mathcal{S}_c(m)$  pour  $m = 2$  (angle  $\pi/4$ ),  $m = 3$  (angle  $\pi/3$ ),  $m = 4$  (angle  $3\pi/8$ ) et  $m = 5$  (angle  $4\pi/10$ ).

Il est intéressant d'observer que le nombre de lignes  $N$  dans la définition de la matrice  $W$  augmente en s'approchant du bord du plan de Hurwitz : en d'autres termes, le nombre de côtés de la fonction polyédrale  $\|Wx\|_\infty$  explose quand le système se rapproche de l'instabilité.

**Lemme 3.31.** *Soit  $A_d$  une matrice de Schur, avec  $n_r$  valeurs propres réelles négatives et  $2n_c$  valeurs propres complexes conjuguées. Pour toute paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_c$ , soit  $m_i$  un entier tel que  $\lambda_i$  se trouve dans l'intérieur du polygone régulier  $\mathcal{P}_{ol}(m_i)$ , avec*

$$\mathcal{P}_{ol}(m) = \text{int conv} \left\{ e^{j\frac{p\pi}{m}} \right\}_{p=0}^{2m-1}. \quad (89)$$

Alors il existe  $W_d \in \mathcal{R}^{N \times n}$  et  $Q_d \in \mathcal{R}^{N \times N}$ , avec  $N = \sum_{i=1}^k m_i + n_r$ , satisfaisant (86). ■

Nous montrons en Figure 10 les polygones  $\mathcal{P}_{ol}(m)$  pour  $m = 2$  (carré),  $m = 3$  (hexagone),  $m = 4$  (octogone),  $m = 5$  (décagone).

La forme des matrices  $W_c$  et  $W_d$  introduites dans les Lemmes précédents est donnée explicitement, voire [121] pour les systèmes en temps continu et [43] pour les systèmes en temps discret. Nous la présentons dans le cas le plus simple, qui est

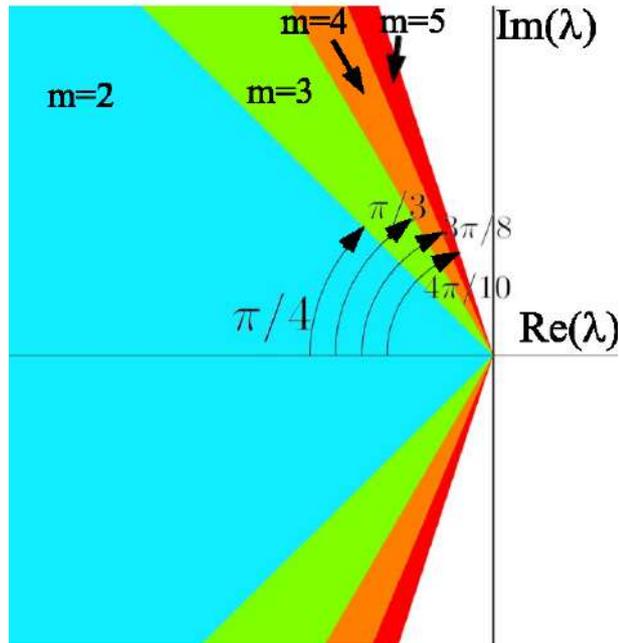


FIGURE 9 – Les secteurs  $\mathcal{S}_c(m)$  pour  $m = 2$  (angle  $\pi/4$ ),  $m = 3$  (angle  $\pi/3$ ),  $m = 4$  (angle  $3\pi/8$ ) et  $m = 5$  (angle  $4\pi/10$ ).

celui des matrices avec valeurs propres distinctes. Pour la construction des matrices en cas de valeurs propres identiques, voire notre [R13].

Comme montré dans [121], la matrice  $W_c$  peut se construire de la façon suivante. Soit  $T_c$  le changement de coordonnées qui transforme  $A_c$  dans sa forme de Jordan réelle :

$$T_c A_c T_c^{-1} = \begin{pmatrix} H_{c1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_{c2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & H_{cnc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_c \end{pmatrix}$$

avec

$$H_{ci} = \begin{pmatrix} -\alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & -\alpha_i \end{pmatrix}$$

et  $R_c$  matrice diagonale de dimension  $n_r \times n_r$  contenant les valeurs propres réelles.

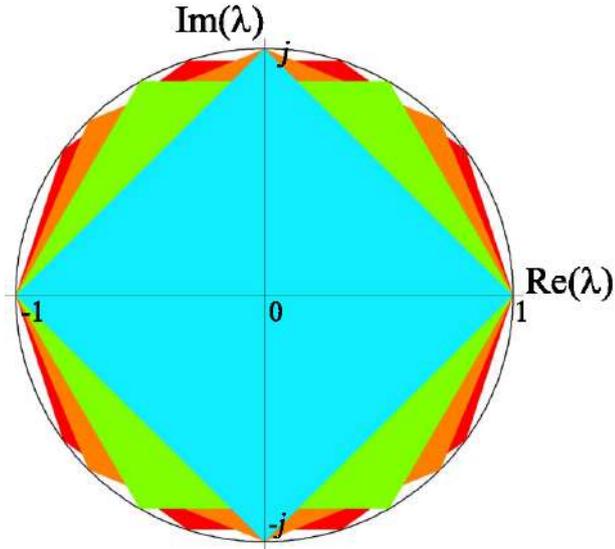


FIGURE 10 – Les polygones  $\mathcal{P}_{ol}(m)$  pour  $m = 2$  (carré),  $m = 3$  (hexagone),  $m = 4$  (octogone),  $m = 5$  (décagone).

Pour  $i = 1, 2, \dots, n_c$ , nous définissons

$$W_{ci} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{m_i}) & \sin(\frac{\pi}{m_i}) \\ \cos(\frac{2\pi}{m_i}) & \sin(\frac{2\pi}{m_i}) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{(m_i-1)\pi}{m_i}) & \sin(\frac{(m_i-1)\pi}{m_i}) \end{pmatrix},$$

$$Q_{ci} = \begin{pmatrix} x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i & y_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i \\ -y_i & 0 & 0 & 0 & x_i \end{pmatrix}$$

avec

$$x_i = -\alpha_i - \frac{\beta_i \cos(\frac{\pi}{m_i})}{\sin(\frac{\pi}{m_i})}, \quad y_i = \frac{\beta_i}{\sin(\frac{\pi}{m_i})}$$

Alors, il est facile de vérifier que (85) est satisfaite par

$$W_c = \begin{pmatrix} W_{c1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & W_{c2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{cn_c} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix} T_c, \quad (90)$$

$$Q_c = \begin{pmatrix} Q_{c1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Q_{c2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{cn_c} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R_c \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Observons d'ailleurs que  $\mu_\infty(Q_c) < 0$  est une conséquence de la position des valeurs propres, qui satisfont  $x_i + |y_i| < 0$ .

La définition des matrices  $W_d$  et  $Q_d$  pour le système en temps discret (84) est similaire, voire [43].

Nous nous intéressons maintenant à l'action de l'approximation de Padé sur les secteurs  $\mathcal{S}_c(m)$  définis dans le Lemme 3.30. Notre résultat technique présenté ici montre que, pour toute valeur propre  $\lambda$  dans  $\mathcal{S}_c(m)$ , son image par l'approximation de Padé se trouve dans  $\mathcal{P}_{ol}(m)$ .

**Lemme 3.32.** *Soit  $m$  un entier positif,  $\mathcal{S}_c(m)$  défini par (88) et  $\mathcal{P}_{ol}(m)$  défini par (89). Fixons un temps d'échantillonnage  $h > 0$  et considérons l'image  $\mathcal{S}_d(m, h)$  de  $\mathcal{S}_c(m)$  par l'approximation diagonale de Padé (82) d'ordre  $p \geq 1$  :*

$$\mathcal{S}_d(m, h) = \{z = Z(\lambda h)Z(-\lambda h)^{-1}, \lambda \in \mathcal{S}_c(m)\}.$$

Alors

$$\mathcal{S}_d(m, h) \subseteq \mathcal{P}_{ol}(m).$$

Une idée graphique du phénomène est donnée par la transformation des secteurs de la Figure 9 par l'approximation diagonale de Padé d'ordre  $p = 1, 2, 3, 4$ . Nous pouvons remarquer en Figure 11 que, par exemple, le secteur  $\mathcal{S}_c(3)$  de couleur verte en Figure 9 est envoyé en un sous-ensemble du cercle unitaire qui, pour tout  $p = 1, 2, 3, 4$ , est contenu dans l'hexagone  $\mathcal{P}_{ol}(3)$  de couleur verte de Figure 10. Pour la preuve détaillée, voire [R12].

Notre résultat principal suit directement.

**Théorème 3.33.** *Soit  $A_c$  une matrice de Hurwitz de dimension  $n$ , avec  $n_r$  valeurs propres réelles négatives et  $2n_c$  valeurs propres complexes conjuguées  $-\alpha_i \pm j\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_c$ . Pour toute paire de valeurs propres complexes conjuguées, soit  $m_i$  un entier tel que  $-\alpha_i \pm j\beta_i$  appartient au secteur  $\mathcal{S}_c(m_i)$  défini en (88).*

*Soit  $A_d(h)$  l'approximation de Padé d'ordre  $p$  et temps d'échantillonnage  $h > 0$  (quelconque) de  $A_c$ . Alors il existe  $W = W_c = W_d(h) \in \mathcal{R}^{N \times n}$ , avec  $N = \sum_{i=1}^k m_i + n_r$ , et  $Q_c \in \mathcal{R}^{N \times N}$ ,  $Q_d(h) \in \mathcal{R}^{N \times N}$ , tels que les conditions (85), (86) sont satisfaites.*

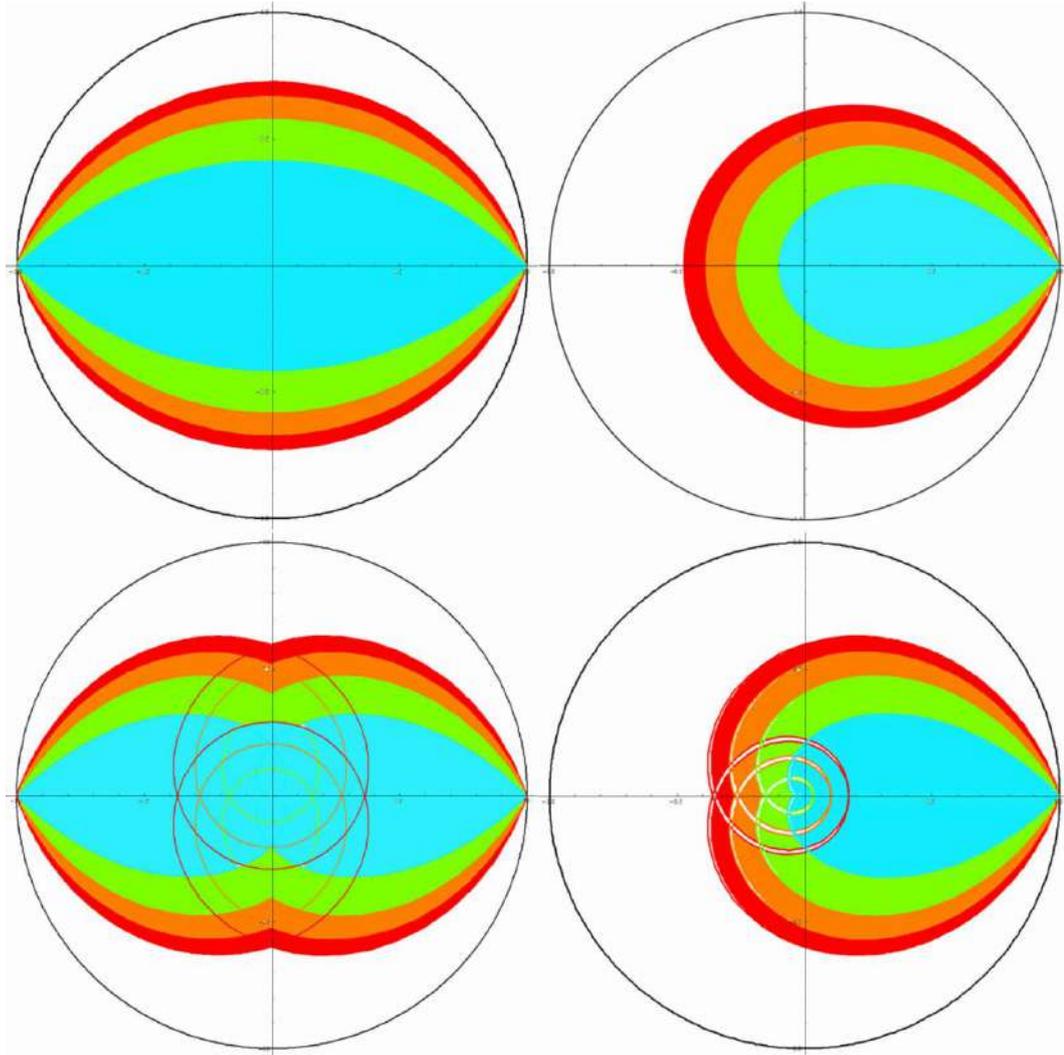


FIGURE 11 – Image des secteurs  $\mathcal{S}_c(m)$  par l'approximation diagonale de Padé d'ordre  $p = 1, 2, 3, 4$ .

Nous avons démontré ce résultat dans le cas des valeurs propres distinctes en [R12]. Le cas des valeurs propres identiques est un peu plus long à traiter pour la définition des matrices  $W_c$  et  $Q_c$  données en (90)-(91), mais la preuve utilise des techniques similaires, voire [R13].

## 4 Curriculum Vitae

### Coordonnées professionnelles

LSIS - Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes  
Domaine universitaire de Saint Jérôme  
Avenue Escadrille Normandie Niemen  
13397 MARSEILLE Cedex 20  
Page web : <http://www.lsis.org/rossif/>  
Mail : [francesco.rossi@lsis.org](mailto:francesco.rossi@lsis.org)  
Tél : +33.(0)4.91.05.60.23.

### Etat civil

Date de naissance : 30 juin 1983.  
Lieu de naissance : Brescia, Italie.  
Nationalités : Italienne et Française.

### Statut actuel

Maître de Conférences, section 61.  
Groupe de recherche : ESCODI - ESTimation COMmande et Diagnostic.

#### CV court

Né en 1983, Ph.D. en 2009 (SISSA, Trieste, Italie et Univ. Bourgogne).  
Maître de Conférences depuis 2010 (Aix-Marseille, France).

**Recherche** : 16 articles (dans IEEE TAC, SIAM J Control, ARMA...)  
18 proceedings de conférences (CDC 2008-2015, ACC, MTNS)  
Collaborations : B. Piccoli (Rutgers, USA), P. Goatin (INRIA Sophia-Antipolis),  
E. Trélat (Paris 6), M. Fornasier (TU Munich), U. Boscain (Poly Paris), ...  
Associate Editor pour IEEE CSS Conference Board.  
Co-organisation de 5 conférences internationales.

**Enseignement** : 5 ans au Dép.t Génie Industriel-Informatique, Polytech' Mar-  
seille. Cours en Automatique et en Mathématiques Appliquées.  
Coordinateur des étudiants en mobilité internationale.  
Supervision de 1 étudiant Ph.D. et de 8 stagiaires M2.

### 4.1 Formation

**Doctorat en Mathématiques appliquées** : Novembre 2006 - Octobre 2009

Titre : Sub-Riemannian geometry and hypoelliptic heat equations on 3D Lie groups with applications to image reconstruction.

Date de soutenance : 22 octobre 2009.

Mention : Très honorable.

Directeur de thèse : BOSCAIN Ugo Vittorio, directeur de recherche CNRS.

Co-directeur de thèse : AGRACHEV Andrei, professeur.

Jury :

PAINDAVOINE Michel,	professeur,	président du jury,
CHITOUR Yacine,	professeur,	rapporteur,
ROUCHON Pierre,	professeur,	rapporteur,
ARNAL Didier,	professeur,	examineur,
CAILLAU Jean-Baptiste,	professeur,	examineur,
GAUTHIER Jean-Paul,	professeur,	examineur,
PETITOT Jean,	professeur,	examineur.

Etablissement : Université de Bourgogne, Dijon et SISSA, Trieste, Italie.

**Master Recherche en Mathématiques** Octobre 2004 - Juillet 2006.

Etablissement : Université de Trieste et SISSA (Ecole Internationale Supérieure des Hautes Etudes), Trieste, Italie.

Mention : 110/110 avec félicitations du jury.

**Licence en Mathématiques** Octobre 2002 - Septembre 2004.

Etablissement : Université de Milan, Milan, Italie.

Mention : 110/110 avec félicitations du jury.

Financement : Bourse d'études par concours national INDAM (Institut National des Hautes Mathématiques, Italie).

**Baccalauréat technique - Informatique** Octobre 1996 - Juillet 2001.

Etablissement : Institut B. Castelli, Brescia, Italie.

Mention : 100/100.

## 4.2 Expériences professionnelles

**Maître de Conférences** depuis le 1<sup>er</sup> septembre 2010.

Etablissement : Aix-Marseille Université, France.

**Chercheur post-doctoral** Novembre 2009 - Juin 2010.

Etablissement : BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Espagne.

Activités d'enseignement : 10h - cours de EDP hypoelliptiques pour les étudiants de doctorat. Réviseur pour les candidatures aux bourses de doctorat.

Activités de recherche : contrôle des EDP, EDP sur groupes de Carnot.

Directeur des recherches : E. Zuazua, directeur BCAM.

Financement : contrat BCAM.

## 4.3 Publications

### Résumé

Type de publication	#	Domaine de publication
Revue internationale	16	ARMA, IEEE TAC, SIAM J. Contr. Optim., SIAM J. Math. An., JFA,...
Prépublications	3	
Conférences internationales	18	CDC 2008-2015, ACC 2014-15, MTNS...
Thèses	2	

Les articles sont disponibles sur mon site internet <http://www.lsis.org/rossif/>

### Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

- [P1] U. BOSCAIN, F. ROSSI, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on  $S^3$ ,  $SO(3)$ ,  $SL(2)$  and Lens Spaces, *SIAM J. Contr. Optim.*, 47, no. 4, pp. 1851–1878, 2008.
- [P2] A. AGRACHEV, U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups, *J. Funct. Analysis* 256, pp. 2621–2655, 2009.
- [P3] U. BOSCAIN, F. ROSSI, Projective Reeds-Shepp car on  $S^2$  with quadratic cost, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16, no. 2, pp. 275–297, 2010.
- [P4] U. BOSCAIN, G. CHARLOT, F. ROSSI, Existence of planar curves minimizing length and curvature, *Proceedings Steklov Institute of Mathematics*, vol. 270 (2010), n. 1, pp. 43–56.
- [P5] F. ROSSI, P. COLANERI, R. SHORTEN, Padé discretization for systems with piecewise linear Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, issue 11, pp. 2717–2722, 2011.
- [P6] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Hypoelliptic heat kernel on 3-step nilpotent Lie groups, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, Vol. 42, pp. 48–61, 2011.
- [P7] U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Anthropomorphic Image Reconstruction via Hypoelliptic Diffusion, *SIAM Journal on Control and Optimization* 50, pp. 1309–1336, 2012.
- [P8] B. PICCOLI, F. ROSSI, Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces : convergence of numerical schemes, *Acta Applicanda Mathematicae* 124, pp. 73–105, 2013.
- [P9] F. ROSSI, Large time behavior for the heat equation on Carnot groups, *Nonlinear Differential Equations and applications*, Volume 20, Issue 3, pp. 1393–1407, 2013.
- [P10] S. SAJJA, F. ROSSI, P. COLANERI, R. SHORTEN, Extensions of “Padé Discretization for Linear Systems With Polyhedral Lyapunov Functions” for generalised Jordan structures, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 58, Issue 8, pp. 2071 - 2076, 2013.

- [P11] B. PICCOLI, F. ROSSI, Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Volume 211, Issue 1, pp. 335–358, 2014.
- [P12] R. DUITTS, U. BOSCAIN, F. ROSSI, Y. SACHKOV, Association fields via cusplless sub-Riemannian geodesics in  $SE(2)$ , *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Volume 49, Issue 2, pp. 384–417, 2014.
- [P13] U. BOSCAIN, R. DUITTS, F. ROSSI, Y. SACHKOV, Curve cusplless reconstruction via sub-Riemannian geometry, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Volume 20, Issue 03, pp. 748–770, 2014.
- [P14] M. FORNASIER, B. PICCOLI, F. ROSSI, Mean-Field Sparse Optimal Control, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372 : 20130400, 2014.
- [P15] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, M. SIGALOTTI, Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems, *Communications in Mathematical Physics*, Volume 333, Issue 3, pp. 1225–1239, 2015.
- [P16] B. PICCOLI, F. ROSSI, E. TRÉLAT, Control to flocking of the kinetic Cucker-Smale model, *SIAM J. Mathematical Analysis* 47, no. 6, pp. 4685–4719, 2015.
- [P17] P. GOATIN, F. ROSSI, A traffic flow model with non-smooth metric interaction : well-posedness and micro-macro limit, *Communications in Mathematical Sciences*, à paraître.

### Prépublications

- B. PICCOLI, F. ROSSI, On properties of the Generalized Wasserstein distance, soumis.
- M. BONGINI, M. FORNASIER, F. ROSSI, F. SOLOMBRINO, Mean-Field Pontryagin Maximum Principle, soumis.
- M.L. DELLE MONACHE, B. PICCOLI, F. ROSSI, Traffic regulation via controlled speed limit, soumis.

### Actes de conférences internationales en tant qu'invité

- U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Image Reconstruction via Hypoelliptic Diffusion on the Bundle of Directions of the Plane, in *Mathematical Image Processing*, Springer Proceedings in Mathematics, Vol. 5, Ed. M. Bergounioux, 2011.

### Conférences internationales avec actes

- [C1] F. ROSSI, Sub-Riemannian geometry on 3-D simple Lie groups and lens spaces, L. S. Pontryagin Centennial Anniversary Conference, Moscow, Russia, 19/06/2008.
- [C2] F. ROSSI, Projective Reeds-Shepp car on  $S^2$ , International conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russia, 01/07/2008.
- [C3] U. BOSCAIN, F. ROSSI, Minimization of length and curvature on the 2-sphere, Mathematical Theory of Network and Systems 2008 - Virginia Tech, Blacksburg, VA, U.S.A., 29/07/2008.

- [C4] U. BOSCAIN, F. ROSSI, Sub-Riemannian geometry on 3-D simple Lie groups, Mathematical Theory of Network and Systems 2008 - Virginia Tech, Blacksburg, VA, U.S.A., 29/07/2008.
- [C5] U. BOSCAIN, F. ROSSI, Shortest paths on 3-D simple Lie groups with nonholonomic constraint, 47th IEEE Conference on Decision and Control - Cancun, Mexico, 9-11/12/2008.
- [C6] U. BOSCAIN, G. CHARLOT, F. ROSSI, Minimization of length and curvature on planar curves, 48th IEEE Conference on Decision and Control - Shanghai, China, 16-18/12/2009.
- [C7] U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Image reconstruction via hypoelliptic diffusion on the bundle of directions of the plane, Mathematics and Image processing - Orléans, France, 30/03/2010.
- [C8] U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, Image reconstruction via optimal control on the bundle of directions of the plane, 49th IEEE Conference on Decision and Control - Atlanta, GA, U.S.A., 15-17/12/2010.
- [C9] F. ROSSI, P. COLANERI, R. SHORTEN, Preservation of piecewise-linear Lyapunov function under Padé discretization, 50th IEEE Conference on Decision and Control - Orlando, FL, U.S.A., 12-15/12/2011.
- [C10] U. BOSCAIN, R. DUTS, F. ROSSI, Y. SACHKOV, Optimal control for reconstruction of curves without cusps, 51th IEEE Conference on Decision and Control - Maui, Hawaii, U.S.A., 10-13/12/2012.
- [C11] B. PICCOLI, F. ROSSI, Control of multiscale model for social dynamics, American Control Conference - Portland, Oregon, U.S.A., 4-6/6/2014.
- [C12] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, M. SIGALOTTI, Controllability of quantum mechanical systems : from conical eigenvalue intersections to Lie bracket conditions, 21st Mathematical Theory Networks Systems, Groningen, The Netherlands, July 7-11, 2014.
- [C13] M. FORNASIER, B. PICCOLI, N. POURADIER DUTEIL, F. ROSSI, Mean-field Optimal Control by Leaders, 53rd IEEE Conf. on Decision and Control - Los Angeles, CA, U.S.A., 15-17/12/2014.
- [C14] M.L. DELLE MONACHE, B. PICCOLI, F. ROSSI, Traffic flow control : avoiding shocks via variable speed limit, 86th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics - Lecce, Italy, March 23-27, 2015.
- [C15] M. BONGINI, M. FORNASIER, F. ROSSI, F. SOLOMBRINO, Mean-field Optimal Control by Leaders, 13th Viennese Workshop Optimal Control and Dynamic Games, Vienna, Austria, May 13-16, 2015.
- [C16] B. PICCOLI, F. ROSSI, E. TRÉLAT, Control of the 1D continuous version of the Cucker-Smale model, 2015 American Control Conference, Chicago, IL, USA, July 1-3, 2015.
- [C17] N. POURADIER DUTEIL, F. ROSSI, U. BOSCAIN, B. PICCOLI, Developmental Partial Differential Equations, 54th IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan, December 15-18, 2015.

- [C18] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, M. SIGALOTTI, Equivalence between exact and approximate controllability for finite-dimensional quantum systems, 54th IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan, December 15-18, 2015.

### Thèses

- [T1] F. ROSSI, Sub-Riemannian geometry and hypoelliptic heat equations on 3D Lie groups - with applications to image reconstruction, thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 163 pages, 2009.
- [T2] F. ROSSI, Problemi di geometria sub-Riemanniana su gruppi di Lie compatti, tesi di laurea magistrale, SISSA et Università di Trieste, Italie, 115 pages, 2006.

#### 4.3.1 Présentations dans des workshops

- F. ROSSI, Anthropomorphic image reconstruction based on optimal control, Non Linear Control : Geometric Methods and Applications, Florence, Italie, 19/04/2013.
- U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI Image reconstruction generalizing minimization of length and curvature, Curves and surfaces - Avignon, France, 26/06/2010.
- F. ROSSI, Métriques sous-Riemanniennes sur de groupes de Lie compacts, Workshop Contrôle et Optimisation, Ardaillers (Valleraugue), France, 09/09/2007.
- F. ROSSI, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on  $SO(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $SL(2)$ , Workshop on Control, Optimization and Stability of nonlinear systems : Geometric and Analytic methods - SISSA/ISAS, Trieste, Italie, 30/05/2007.

#### 4.3.2 Autres séminaires

- F. ROSSI, Analysis and control of transport PDEs with nonlocal velocities, Séminaire CPT, Marseille, France, 18/03/2015.
- F. ROSSI, Control of kinetic models for crowds, Journée thématique Optimisation et Contrôle, Marseille, France, 05/12/2014.
- F. ROSSI, PDE ipoellittiche : teoria e applicazioni, Università di Milano-Bicocca, Italie, 13/03/2013.
- F. ROSSI, Legami tra PDE ipoellittiche e teoria del controllo, Università di Modena e Reggio Emilia, Italie, 07/03/2013.
- F. ROSSI, Optimal control for modelling of human behavior : image reconstruction and crowd motion, TU-Berlin, Allemagne, 04/01/2012.
- F. ROSSI, Optimal control of the unicycle and anthropomorphic image reconstruction, TU-Berlin, Allemagne, 08/11/2011.
- F. ROSSI, Introduzione alla Teoria del Controllo, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia, Italie, 24/10/2011.
- F. ROSSI, Controllo ottimo e PDE ipoellittiche, Dipartimento di Ingegneria dell'informazione e metodi matematici, Università degli studi di Bergamo, Dalmine (BG), Italie, 28/05/2010.

- F. ROSSI, Metodi per PDE ipoellittiche su gruppi di Lie, Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italie, 26/05/2010.
- F. ROSSI, Optimal control of the unicycle and its applications on image reconstruction, Séminaire Robotique et Intelligence Artificielle, LAAS, Toulouse, 16/03/2010.
- F. ROSSI, Géométrie non-holonome et EDP hypoelliptiques, Seminaire EDP, Institut de Mathématiques de Toulouse, 15/03/2010.
- F. ROSSI, Hypoelliptic heat equations on Lie groups, BCAM, Bilbao, Espagne, 31/03/2009.
- F. ROSSI, Optimal control, diffusion processes and applications, Hamilton Institute, Maynooth, Irlande, 06/03/2009.
- F. ROSSI, Equation de la chaleur et reconstruction d'images, LSIS, Marseille, 11/12/2008.
- F. ROSSI, The Pontryagin Maximum Principle on compact Lie groups, SISSA, Trieste, Italie, 03/07/2006.
- F. ROSSI, The Weak Maximum Principle, SISSA, Trieste, Italie, 21/06/2006.

#### 4.4 Activités d'enseignement

**2006-2009** : Travaux Dirigés en Mathématiques Appliquées et Automatique (ICTP Trieste, Université de Bourgogne, Université de Toulon).

**Depuis 2010** : Maître de Conférences à Polytech Marseille. Etudiants de 3A à 5A en Génie Industriel et Informatique.

8 cours par an : Introduction à l'Automatique (20h), Régulation (20h), Commande par retour d'état (20h) , Commande optimale (20h), Mathématiques pour l'Automatique (10h), Statistiques (10h), TD de Mathématiques (20h), TP d'Automatique (20h).

Responsabilités pédagogiques : Coordinateur des étudiants en mobilité internationale ; coordinateur de la salle des TP d'automatique.

**2013-2014** : Master Recherche SIS : cours "Systèmes de commande, commande optimale et planification de trajectoire", 10h.

**Juin 2015** : Doctorat en Mathématiques des Universités de Modena-Reggio Emilia-Ferrara-Parma : cours " Commande en dimension finie et infinie", 9h.

#### 4.5 Supervision d'étudiants

**Depuis Octobre 2014** : J. Marino, étudiant en thèse Cifre ST Microelectronics-LSIS. Co-encadré à 50% avec M. Ouladsine. Sujet : Diagnostic of production equipments with Principal Component Analysis.

Les résultats de ces travaux n'étant pas encore mûrs, ils ne sont pas présentés dans ce mémoire.

**Mars-Juillet 2015** : A. Ben Braim, étudiant M2 Recherche du Master SIS, Marseille. Sujet : Modeling and control of interconnected robots.

**Mars-Juillet 2014** : W. Nouainia, étudiant M2 Recherche du Master SIS, Marseille. Sujet : Collective behavior of flocks.

**Juin-Juillet 2014** : S. Ohanian et Q. Watel, Etudiants à GII Polytech' Marseille, Stage d'Initiation à la Recherche - RUTGERS Camden, NJ, USA - co-encadrés à 50% avec B. Piccoli.

**Juin-Juillet 2013** : M. Agostini et N. Ait Kaddour, Etudiants à GII Polytech' Marseille, Stage d'Initiation à la Recherche - RUTGERS Camden, NJ, USA - co-encadrés à 50% avec B. Piccoli.

**Juin-Juillet 2012** : M. El Kasri, Etudiant à GII Polytech' Marseille, Stage d'Initiation à la Recherche - LSIS, Marseille.

**Mars-Juillet 2012** : B. Heymann, Etudiant à Polytechnique Paris, Stage de Recherche - RUTGERS Camden, NJ, USA - co-encadré à 50% avec B. Piccoli.

#### 4.5.1 Participation à jurys de thèse

**13 juillet 2015** : Thèse M2 de A. Farina (Univ. Cattolica, Brescia, Italie)

Titre : Measures on graphs : distances and gradient flows.

Directeur : G. G. Giusteri.

**5 décembre 2012** : Thèse de Fouad El Hacemi (CRAN, Nancy)

Titre : Analyse de stabilité des systèmes à commutation singulièrement perturbés.

Jury : J. Daafouz (directeur de thèse), M. Sigalotti (co-directeur), U. Boscain (rapporteur), D. Henrion (rapporteur), F. Rossi, M. Tucsnack (président).

## 4.6 Financements

### 4.6.1 Financements personnels

**PICS CNRS 2016-2019** : Collaboration entre France et Etats-Unis. Projet "Commande de l'équation de transport", avec B. Piccoli (Rutgers, NJ).

**PHC PROCOPE 2014-2015** : Collaboration entre France et Allemagne. Projet "Sparse Control of Multiscale Models of Collective Motion", avec M. Fornasier (TU-Munich).

**Délégation 2014-2015** : Délégation CNRS pour le projet de recherche "Analyse et commande des systèmes monotones multi-échelles".

**Institut Carnot STAR 2013** : Financement pour une collaboration avec R. Colombo (U. Brescia, Italie).

### 4.6.2 Participation à des financements

**ANR PRC 2015-2018** : Projet SR-Gi "Géométrie sous-Riemannienne". Porté par E. Trélat (U. Paris 6). Je participe au projet en continuant, notamment, les recherches présentées en Section 3.

**NSF Research Network 2012-...** : Projet Ki-Net "Kinetic description of emerging challenges in multiscale problems of natural sciences". Porté par E. Tadmor (U. Maryland, USA). Je suis collaborateur extérieur.

## 4.7 Séjours pour collaboration scientifique

**18 mois entre 2011 et 2016** : Rutgers, Camden, NJ, USA - avec B. Piccoli.

**3 mois en 2014-15** : TU Munich, Germany - avec M. Fornasier - financé par PHC PROCOPE.

**Mars-Mai 2013** : Università di Brescia, Italie - avec R. Colombo - financé par l'Institut Carnot STAR.

**Novembre 2011** : TU Berlin, Berlin, Germany - avec R. Shorten.

**Septembre 2009** : Hamilton Institute, Maynooth, Irlande - avec R. Shorten.

**Mars 2009** : BCAM, Bilbao, Espagne - avec E. Zuazua.

## 4.8 Organisation de conférences

**24-28 octobre 2010** : Workshop on Nonlinear Control and Singularities

Porquerolles, Var, France.

Page web : <http://www.lsis.org/nlc/>

Organisateurs : U. Serres, F. Rossi, J.-P. Gauthier, U. Boscain, Y. Chitour.

20 Participants (France, Russie, Pays-Bas).

Responsabilités : organisation générale, réalisation du site web, suivi des proceedings.

**9-10 avril 2013** : BIO Inspired Optimal Systems

Toulon, France.

Page web : <http://glotin.univ-tln.fr/bio2s>

Organisateurs : H. Glotin, P. Gorce, J.-P. Gauthier, F. Rossi, F. Chittaro.

20 Participants.

Responsabilités : organisation générale.

**8-9/07/2013** : Invited sessions at SIAM conference on Control and its applications]

San Diego, USA.

Page web : <http://www.siam.org/meetings/ct13/>

Organisateurs : U. Boscain, F. Rossi.

Intervenants : J.-M. Coron, B. Piccoli, T. Chambrion, A. Mansouri, B. Merlet, R. Neel.

Sessions : Geometric Methods for PDEs : Modeling and Control ;

Geometric Methods for PDEs : Sub-Riemannian Geometry.

**2-6 décembre 2013** : MCT : Mathematical Control in Trieste

SISSA, Trieste, Italie.

Page web : <http://mct.lsis.org/>

Comité scientifique : A. Agrachev, J.-M. Coron, J.-P. Gauthier, E. Trélat, E. Zuazua.

Comité organisateur : C. Altafini, U. Boscain, R. Ghezzi, F. Rossi.

Speakers invités : 40 personnes (France, Etats-Unis, Allemagne, Inde, Belgique...)

Sponsors et support financier : IFAC, European Science Foundation (10.000 EUR), ERC grants (15.000 EUR), GNAMPA-INDAM (4.500 EUR), SISSA, GDR CON-EDP.

Responsabilités : organisation générale, recherche de financements.

**12–14/12/2016** : 55th IEEE Conference on Decision and Control

Las Vegas, Nevada, USA.

Page web : <http://cdc2016.ieeecss.org/>

CDC est reconnu comme la principale conférence scientifique consacrée à la théorie du contrôle, à l'automatique et à leurs applications.

J'ai le rôle de Publicity Chair. General Chair : A. Giua (Univ. Cagliari, Italie et Aix-Marseille Univ).

## 4.9 Activité éditoriale

### **Editeur associé pour IEEE CSS Conference Editorial Board.**

Rapporteur pour les journaux : SIAM J. Math. Analysis, SIAM J. Control Optimization, J. Dynamical Control Systems, ESAIM : COCV, J. Differential Equations, Systems & Control letters, Networks and Heterogeneous Media, J. Mathematical Sciences, J. Mathematical Imaging and Vision, Forum Mathematicum.

Rapporteur pour AMS Reviews (MathSciNet).

## 4.10 Travaux d'expertise industrielle

**Depuis septembre 2011** : évaluation scientifique de dossiers des entreprises demandant le Crédit d'Impôt Recherche<sup>17</sup> dans les domaines Automatique, STIC et Mathématiques.

Le ministère responsable est le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Responsable scientifique du secteur : Marc Daumas (PROMES, Perpignan).

## 4.11 Autres compétences

### **Connaissances informatiques**

C, C++, databases (SQL), mathematical software (MATLAB, Mathcad, Mathematica, LATEX), webpages (HTML, PHP).

### **Langues**

Italien : langue maternelle. Français : courant. Anglais : courant. Espagnol : notion.

---

17. Pour plus d'informations, voir [www.industrie.gouv.fr/cir/](http://www.industrie.gouv.fr/cir/)

## Références

- [1] R. ADAMI, U. BOSCAIN, Controllability of the Schrödinger Equation via Intersection of Eigenvalues, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1080–1085, 2005.
- [2] A. AGRACHEV, D. BARILARI, U. BOSCAIN, *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry*, <http://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/Notes.php>
- [3] A. AGRACHEV, U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, F. ROSSI, The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups, *J. Funct. Analysis* 256, pp. 2621–2655, 2009.
- [4] G. ALBI, M. BONGINI, E. CRISTIANI, D. KALISE, Invisible sparse control of self-organizing agents leaving unknown environments, submitted.
- [5] G. ALBI, L. PARESCHI, M. ZANELLA, Boltzmann-type control of opinion consensus through leaders, *Philos Trans A Math Phys Eng Sci.* Nov 13; 372(2028), 2014.
- [6] L. AMBROSIO, W. GANGBO, Hamiltonian ODEs in the Wasserstein Space of Probability Measures, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Volume 61, Issue 1, pp. 18–53, 2008.
- [7] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, 2008.
- [8] D. ANGELI, E. SONTAG, Monotone Control Systems, *IEEE TAC*, 48 , pp. 1684-1698, 2003.
- [9] A.A. ARDENTOV, YU.L. SACHKOV, Extremal trajectories in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, *Sbornik : Mathematics* 202 :11, pp. 1593–1615, 2011.
- [10] R. AXELROD, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, 1984.
- [11] M. BALLERINI, N. CABIBBO, ET AL, Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance : Evidence from a field study, *PNAS* 105, pp. 1232–1237, 2008.
- [12] A. O. BARUT, R. RACZKA, *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific, 1986.
- [13] A. BELLAICHE, The tangent space in sub-Riemannian geometry, in *Sub-Riemannian geometry*, edited by A. Bellaïche and J.-J. Risler, Progr. Math., 144, Birkhäuser, Basel, pp. 1–78, 1996.
- [14] N. BELLOMO, M. A. HERRERO, A. TOSIN, On the dynamics of social conflict : Looking for the Black Swan, *Kinetic and Related Models* 6, no. 3, pp. 459–479, 2013.
- [15] J.-D. BENAMOU, Y. BRENIER, A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem, *Numer. Math.* 84, no. 3, pp. 375–393, 2000.
- [16] S. BEXELIUS, An extended model for car-following, *Transportation Research* 2.1, pp. 13–21, 1968.

- [17] G. BIRKHOFF, R.S. VARGA, Discretization errors for well-set Cauchy problems, *Journal of Mathematics Physics*, V. 44 N. 1, pp. 28–51, 1965.
- [18] S. BLANDIN, P. GOATIN, Well-posedness of a conservation law with non-local flux arising in traffic flow modeling, *Numerische Mathematik*, to appear.
- [19] A. BLAQUIÈRE, Controllability of a Fokker-Planck equation, the Schrödinger system, and a related stochastic optimal control (revised version), *Dynamics and Control*, Volume 2, Issue 3, pp. 235–253, 1992.
- [20] V. D. BLONDEL, J. M. HENDRICKX, J. N. TSITSIKLIS, Continuous-time average-preserving opinion dynamics with opinion-dependent communications, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(8), pp. 5214–5240, 2010.
- [21] A. BONFIGLIOLI, E. LANCONELLI, F. UGUZZONI, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin, 2007.
- [22] U. BOSCAIN, G. CHARLOT, F. ROSSI, Existence of planar curves minimizing length and curvature, *Proceedings Steklov Institute of Mathematics*, vol. 270 (2010), n. 1, pp. 43–56.
- [23] U. BOSCAIN, R. CHERTOVSKIH, J.P. GAUTHIER, A. REMIZOV, Hypoelliptic Diffusion and Human Vision : a Semi-Discrete New Twist on the Petitot Theory, *SIAM J. Imaging Sci.*, 7(2), pp. 669–695, 2014.
- [24] U. BOSCAIN, F. CHITTARO, P. MASON, M. SIGALOTTI, Adiabatic control of the Schroedinger equation via conical intersections of the eigenvalues, *IEEE Trans. Automat. Control* 57 n. 8, pp. 1970–1983, 2012.
- [25] U. BOSCAIN, J. DUPLAIX, J.P. GAUTHIER, F. ROSSI, Anthropomorphic Image Reconstruction via Hypoelliptic Diffusion, *SIAM Journal on Control and Optimization* 50, pp. 1309-1336.
- [26] U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER, D. PRANDI, A. REMIZOV, Image reconstruction via non-isotropic diffusion in Dubins/Reed-Shepp-like control systems, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, December 2014.
- [27] F. BULLO, J. CORTÉS, S. MARTÍNEZ, *Distributed Control of Robotic Networks*, Princeton University Press, 2009.
- [28] S. CAMAZINE, J. L. DENEUBOURG, N. R. FRANKS ET. AL., *Self-organization in Biological Systems*, Princeton University Press, 2001.
- [29] E. J. CANDÈS, J. ROMBERG, T. TAO, Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(8), pp. 1207–1223, 2006.
- [30] J. A. CANIZO, J. A. CARRILLO, J. ROSADO, A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 21.03, pp. 515–539, 2011.
- [31] C. CANUDAS DE WIT, L. R. LEON OJEDA, A. Y. KIBANGOU, Graph Constrained-CTM observer design for the Grenoble south ring, *13th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems*, 2012.
- [32] C. CANUTO, F. FAGNANI, P. TILLI, An Eulerian approach to the analysis of Krause’s consensus models, *SIAM J. Control Optim.* 50, pp. 243–265, 2012.

- [33] M. CAPONIGRO, M. FORNASIER, B. PICCOLI, E. TRÉLAT, Sparse stabilization and optimal control of the Cucker-Smale model, *Math. Cont. Related Fields*, 4, pp. 447–466, 2013.
- [34] R. CARMONA, F. DELARUE, A. LACHAPELLE, Control of McKean-Vlasov dynamics versus mean field games, *Math. Financ. Econ.*, 7(2), pp. 131–166, 2013.
- [35] J. A. CARRILLO, Y. CHOI, M. HAURAY, The derivation of swarming models : mean-field limit and Wasserstein distances, in *Collective dynamics from bacteria to crowds*, Springer Vienna, pp. 1–46, 2014.
- [36] J.A. CARRILLO, M. FORNASIER, J. ROSADO, G. TOSCANI, Asymptotic flocking dynamics for the kinetic Cucker-Smale model, *SIAM J. Math. Anal.* 42 , pp. 218–236, 2010.
- [37] E. CASAS, C. CLASON, K. KUNISCH, Approximation of elliptic control problems in measure spaces with sparse solutions, *SIAM J. Control Optim.* 50(4), pp. 1735–1752, 2012.
- [38] C. CASTELLANO, S. FORTUNATO, V. LORETO, Statistical physics of social dynamics, *Rev. Modern Phys.* 81, pp. 591–646., 2009
- [39] A. CAVAGNA, A. CIMARELLI ET AL, Scale-free correlations in starling flocks, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 107, pp. 11865–11870, 2010.
- [40] T. CHAMPION, L. DE PASCALE, P. JUUTINEN, The  $\infty$ -Wasserstein distance : local solutions and existence of optimal transport maps, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol 40 (1), pp. 1–20, 2008.
- [41] G. S. CHIRIKJIAN, A. B. KYATKIN, *Engineering applications of noncommutative harmonic analysis*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
- [42] L. CHIZAT, B. SCHMITZER, G. PEYRÉ, F.-X. VIALARD, *An interpolating distance between optimal transport and Fischer-Rao*, arXiv :1506.06430.
- [43] F.K. CHRISTOPHERSEN, M. MORARI, Further results on 'Infinity norms as Lyapunov functions for linear systems', *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 52, N. 3, pp. 547–553, 2007.
- [44] F. CLARKE, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, volume 264, Springer, 2013.
- [45] I. COUZIN, J. KRAUSE, N. FRANKS, S. LEVIN, Effective leadership and decision making in animal groups on the move, *Nature* 433, pp. 513–516, 2005.
- [46] M. C. CRAIR ET AL., Ocular dominance peaks at pinwheel center singularities of the orientation map in cat visual cortex, *J. Neurophysiol.* 77, pp. 3381–3385, 1997.
- [47] E. CRISTIANI, B. PICCOLI, A. TOSIN, Multiscale Modeling of Granular Flows with Application to Crowd Dynamics, *Multiscale Model. Simul.* 9, pp. 155–182, 2011.
- [48] E. CRISTIANI, B. PICCOLI, A. TOSIN, *Multiscale Modeling of Pedestrian Dynamics*, MS&A : Modeling, Simulation and Applications, vol. 12, Springer International Publishing, 2014.

- [49] A. CSIKOS, I. VARGA, K.M. HANGOS, Freeway shockwave control using ramp metering and variable speed limits, *21st Mediterranean Conf. Control Automation (MED)*, pp. 1569–1574, 2013.
- [50] F. CUCKER, S. SMALE, Emergent Behavior in Flocks, *IEEE Trans. Automat. Control* 52, no. 5., pp. 852–862, 2007.
- [51] G. DAL MASO, *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Birkhäuser, 1993.
- [52] P. DEGOND, S. MOTSCH, Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 18, pp. 1193–1215, 2008.
- [53] M. DI FRANCESCO, M. ROSINI, Rigorous derivation of nonlinear scalar conservation laws from follow-the-leader type models via many particle limit, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, pp. 1–41, 2015.
- [54] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. III, *Canad. J. Math.* 10, pp. 321–348, 1958
- [55] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. I. *Amer. J. Math.* 81, pp. 160–170, 1959.
- [56] J. DIXMIER, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX, Gauthier-Villars & Cie, 1964.
- [57] R. L. DOBRUSHIN, ROLAND L'VOVICH, Vlasov equations, *Functional Analysis and Its Applications* 13.2, pp. 115–123, 1979.
- [58] D. L. DONOHO, Compressed sensing, *IEEE Trans. Inform. Theory* 52(4) pp. 1289–1306, 2006.
- [59] B. DUERING, P. MARKOWICH, J. F. PIETSCHMANN, M. T. WOLFRAM, Boltzmann and Fokker-Planck equations modelling opinion formation in the presence of strong leaders, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 465, pp. 3687–3708, 2012.
- [60] M. DUFLO, Analyse harmonique sur les groupes algébriques complexes : formule de Plancherel (d'après M. Andler) et conjecture de M. Vergne, *Bourbaki seminar*, pp. 279–291, Vol. 1982/83.
- [61] J. DUOANDIKOETXEA, E. ZUAZUA, Moments, masses de Dirac et développements de fonctions, *C.R. Acad. Sci. Paris* 315 (1992), pp. 693–698.
- [62] R. EL ASSOUDI, J. P. GAUTHIER, I. A. K. KUPKA, On subsemigroups of semisimple Lie groups, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13 n.1, pp. 117–133, 1996.
- [63] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC, 1992.
- [64] J. EVERS, A. MUNTEAN, Modeling Micro-Macro Pedestrian Counterflow in Heterogeneous Domains, *Nonlinear Phenomena in Complex Sys.*, Vol. 14, N. 1, pp. 27–37, 2011.
- [65] A. FERSCHA, K. ZIA, LifeBelt : Silent Directional Guidance for Crowd Evacuation, Proceedings of the 13th International Symposium on Wearable Computers (ISWC'09), IEEE Computer Society Press, 2009.

- [66] M. FRANCESCHELLI, A. GASPARRI, A. GIUA, C. SEATZU, Decentralized Estimation of Laplacian Eigenvalues in Multi-Agent Systems, *Automatica*, Vol. 49, No. 4, pp. 1031–1036, 2013.
- [67] M. FRANCESCHELLI, A. GIUA, C. SEATZU, Distributed Averaging in Sensor Networks Based on Broadcast Gossip Algorithms, *IEEE Sensors Journal*, Vol. 11, No. 3, pp. 808 - 817, 2011.
- [68] G. B. FOLLAND, Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, *Ark.Mat.* 13, n. 2, pp. 161–207, 1975.
- [69] M. FORNASIER, F. SOLOMBRINO, Mean-Field Optimal Control, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 20 (4), pp. 1123–1152, 2014.
- [70] B. GAVEAU, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta Math.*, 139 (1977), no. 1-2, pp. 95–153.
- [71] O. GLASS, On the controllability of the Vlasov-Poisson system, *J. Differential Equations*, Volume 195, Issue 2, pp. 332–379, 2003.
- [72] O. GLASS, D. HAN-KWAN, On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields, *J. Differential Equations*, 252(10) :5453-5491, 2012.
- [73] E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, 1996.
- [74] M. GROMOV, Carnot-Carathéodory spaces seen from within, in *Sub-Riemannian geometry*, edited by A. Bellaïche and J.-J. Risler, Progr. Math., 144, Birkhäuser, Basel, pp. 79–323, 1996.
- [75] S. GUÉRIN, H.R. JAUSLIN, Control of Quantum Dynamics By Laser Pulses : Adiabatic Floquet Theory, *Advances in Chemical Physics* 125, 2003.
- [76] S.-Y. HA, J.-G. LIU, A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit, *Commun. Math. Sci.* 7, no. 2, pp. 297–325, 2009.
- [77] S.-Y. HA, E. TADMOR, From particle to kinetic and hydrodynamic description of flocking, *Kinetic and Related Methods* 1, no. 3, pp. 415–435, 2008.
- [78] R. HEGSELMANN, U. KRAUSE, Opinion dynamics and bounded confidence : models, analysis and simulation, *J. Artificial Societies Social Simulation* 5, no. 3, 2012.
- [79] A. HEGYI, S.P. HOOGENDOORN, M. SCHREUDER, H. STOELHORST, F. VITI, SPECIALIST : A dynamic speed limit control algorithm based on shock wave theory, *IEEE Conf. Intelligent Transportation Systems 2008*, pp. 827–832, 2008.
- [80] D. HELBING, Traffic and related self-driven many particle systems, *Rev. Modern Phys.* 73, pp. 1067–1141, 2001.
- [81] D. HELBING, *Quantitative Sociodynamics : Stochastic Methods and Models of Social Interaction Processes*, Springer-Verlag, New York, 2010.
- [82] D. HELBING, I. J. FARKAS, P. MOLNÁR, T. VICSEK, Simulation of Pedestrian Crowds in Normal and Evacuation Situations, *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, Springer, pp. 21–58, 2002.

- [83] R. HERZOG, G. STADLER, G. WACHSMUTH, Directional sparsity in optimal control of partial differential equations, *SIAM J. Control and Optimization* 50(2), pp. 943–963, 2012.
- [84] E. HEWITT, K.A. ROSS, *Abstract harmonic analysis*. Vol. I. Structure of topological groups, integration theory, group representations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 115. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [85] E. HEWITT, K.A. ROSS, *Abstract harmonic analysis*. Vol. II : Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152 Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.
- [86] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic Second Order Differential Equations, *Acta Math.* 119, pp. 147–171, 1967.
- [87] D. H. HUBEL, T. N. WIESEL, Receptive fields of single neurones in the cat’s striate cortex, *The Journal of physiology* 148 (3), pp. 574–591, 1959.
- [88] A. HULANICKI, The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group, *Studia Math.* 56, no. 2, pp. 165–173, 1976.
- [89] M.O. JACKSON, *Social and Economic Networks*, Princeton University Press, 2010.
- [90] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER, F. OTTO, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, *SIAM J. Math. Anal.*, vol 29, n. 1, pp. 1–17, 1998.
- [91] V. JURDJEVIC, *Geometric Control Theory*, Cambridge Stud. Adv. Math. 52, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [92] P. J. KELLMAN, T. F. SHIPLEY, A theory of visual interpolation in object perception, *Cognitive psychology* 23.2 pp. 141–221, 1991.
- [93] H. KIENDL, J. ADAMY, P. STELZNER, Vector norms as Lyapunov functions for linear systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 439, pp. 839–842, 1995.
- [94] A.A. KIRILLOV, *Elements of the theory of representations*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [95] M. V. KLIBANOV, M. YAMAMOTO, Exact Controllability for the Time Dependent Transport Equation, *SIAM Journal on Control and Optimization* 46 :6, pp. 2071–2195, 2007.
- [96] S. KONDRATYEV, L. MONSAINGEON, D. VOROTNIKOV, A new optimal transport distance on the space of finite Radon measures, *Advances in Differential Equations*, à paraître.
- [97] V. KUMAR, N. LEONARD, A. MORSE (eds), *Cooperative Control*, Springer, 2004.
- [98] S. LEMERCIER, A. JELIC, R. KULPA, J. HUA, J. FEHRENBACH, P. DEGOND, C. APPERT-ROLLAND, S. DONIKIAN, J. PETTRÉ, Realistic following behaviors for crowd simulation, *Computer Graphics Forum* 31, pp. 489–498, 2012.

- [99] M. LIERO, A. MIELKE, G. SAVARÉ, Optimal entropy-transport problems and a new Hellinger-Kantorovich distance between positive measures, arXiv :1508.07941.
- [100] P.L. LIONS, B. PERTHAME, Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system, *Inventiones mathematicae*, 105(1), pp. 415–430, 1991.
- [101] Z. LIN, W. DING, G. YAN, C. YU, A. GIUA, Leader-Follower Formation via Complex Laplacian, *Automatica* 49 (6), pp. 1900–1906, 2013.
- [102] D. LOMBARDI, E. MAITRE, Eulerian models and algorithms for unbalanced optimal transport, *ESAIM : M2AN*, DOI : 10.1051/m2an/2015025, 2015.
- [103] P. B. LUH, C. T. WILKIE, S. C. CHANG, K. L. MARSH, N. OLDERMAN, Modeling and Optimization of Building Emergency Evacuation Considering Blocking Effects on Crowd Movement, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 9(4), pp. 687–700, 2012.
- [104] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO, A macroscopic crowd motion model of gradient flow type, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20 (10), pp. 1787–1821, 2010.
- [105] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO, J. VENEL, Handling congestion in crowd motion modeling, *Networks and Heterogeneous Media*, Volume 6, Number 3, pp. 485–519, 2011.
- [106] B. MAURY, J. VENEL, Un modèle de mouvement de foule, *ESAIM Proc.* 18, pp. 143–152, 2007.
- [107] N. MECHOLSKY, E. OTT, T.M. ANTONSEN, Obstacle and predator avoidance in a model for flocking, *Phys. D* 239, pp. 988–996, 2010.
- [108] N. MICHAEL, D. MELLINGER, Q. LINDSEY, V. KUMAR, The GRASP Multiple Micro-UAV Testbed, *IEEE Robotics & Automation Magazine* 17, pp. 56–65, 2010.
- [109] I. MOISEEV, YU. L. SACHKOV, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM : COCV* 16, no. 2, pp. 380–399, 2010.
- [110] C. MOLER, C. VAN LOAN, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later, *SIAM Review*, Vol. 45, No. 1, pp. 3–Ū-49, 2003.
- [111] R. MONTGOMERY, A Tour of Subriemannian Geometries, their Geodesics and Applications, Mathematical Surveys and Monographs 91, AMS, Providence, RI, 2002.
- [112] T. MORI, T.V. NGUYEN, Y. MORI, H. KOKAME, Preservation of Lyapunov functions under bilinear mapping, *Automatica*, Vol. 42, pp. 1055–1058, 2006.
- [113] S. MOTSCH, E. TADMOR, Heterophilious dynamics enhances consensus, *SIAM Rev.* 56, no. 4, pp. 577–621, 2014.
- [114] R. OLFATI-SABER, Flocking for multi-agent dynamic systems : algorithms and theory, *IEEE Trans. Automat. Control* 51, pp. 401–420, 2006.

- [115] J. PARRISH, L. EDELSTEIN-KESHET, Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation, *Science* 294, pp. 99–101, 1999.
- [116] J. PETITOT, Vers une Neuro-géométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux, *Math. Inform. Sci. Humaines*, n. 145 , pp. 5–101, 1999.
- [117] J. PETITOT, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, *Journal of Physiology - Paris*, Vol. 97, pp. 265–309, 2003.
- [118] J. PETITOT, *Neurogéométrie de la vision - Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
- [119] B. PICCOLI, A. TOSIN, Time-Evolving Measures and Macroscopic Modeling of Pedestrian Flow, *Archive Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 199, Issue 3, pp. 707–738, 2011.
- [120] A. PIETRUS, V. VELIOV, On the discretization of switched linear systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 58, No. 6, pp. 395–399, 2009.
- [121] A. POLANSKI, On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 40, N. 7, pp. 1270–1274, 1995.
- [122] L. S. PONTRYAGIN, V. BOLTIANSKI, R. GAMKRELIDZE, AND E. MITCHTCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley Interscience, New York, London, 1962.
- [123] N. POURADIER DUTEIL, F. ROSSI, U. BOSCAIN, B. PICCOLI, Developmental Partial Differential Equations, 54th IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan, December 15-18, 2015.
- [124] F. S. PRIULI, First Order Mean Field Games in Pedestrian Dynamics, arXiv :1402.7296.
- [125] J. P. RAYMOND, H. ZIDANI, Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations, *Appl. Math. Optim.*, 39(2), pp. 143–177, 1999.
- [126] C.W. REYNOLDS, Flocks, herds and schools : A distributed behavioral model, *ACM SIGGRAPH Computer Graphics* 21, pp. 25–34, 1987.
- [127] D. ROSA, A. GIUA, A non progressive model of innovation diffusion in social networks, *52nd IEEE Conf. on Decision and Control*, 2013.
- [128] D. ROSA, A. GIUA, On the Spread of Innovation in Social Networks, *Nec-Sys'13 : 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*, 2013.
- [129] D. L. RUSSELL, Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations : Recent Progress and Open Questions, *SIAM Review* 20 :4, pp. 639–739, 1978.
- [130] Y. SACHKOV, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM : COCV*, Volume 16, Number 4, pp. 1018–1039, 2010.
- [131] Y. L. SACHKOV, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM : COCV*, Volume 17, Number 2, pp. 293–321, 2011.

- [132] R. G. SANFELICE, A. R. TEEL, Dynamical properties of hybrid systems simulators, *Automatica*, Vol. 46 , Issue 2, pp. 239–248, 2010.
- [133] L. SKÁLA ET AL., Analytic solutions of the Schrödinger equation for the modified quartic oscillator, *Internat. J. Theoret. Phys.* 36 (1997), no. 12, pp. 2953–2961.
- [134] H.L. SMITH, *Monotone Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc., 2008.
- [135] H. SPOHN, *Large scale dynamics of interacting particles*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [136] G. STADLER, Elliptic optimal control problems with  $L^1$ -control cost and applications for the placement of control devices. *Comput. Optim. Appl.* 44(2), pp. 159–181, 2009.
- [137] K. SZNAJD-WERON, J. SZNAJD, Opinion evolution in closed community, *International Journal of Modern Physics C* 11.06 pp. 1157–1165, 2000.
- [138] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*. Mathematical Surveys and Monographs, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [139] G. TOSCANI, Kinetic models of opinion formation, *Commun. Math. Sci.* 4, pp. 481–496, 2006.
- [140] A. TOSIN, P. FRASCA, Existence and approximation of probability measure solutions to models of collective behaviors, *Networks Heter. Media*, 6 (3), pp. 561–596, 2011.
- [141] N. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, T. COULHON, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 100, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [142] T. VICSEK, A. CZIROK, E. BEN-JACOB, I. COHEN, O. SHOCHET, Novel type of phase transition in a system of self-driven particles, *Phys. Rev. Lett.* 75, pp. 1226–1229, 1995.
- [143] C. VILLANI, *Limite de champ moyen* Cours de DEA, 2002.
- [144] C. VILLANI, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, 2003.
- [145] C. VILLANI, *Optimal Transport : Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 2008.
- [146] R. VINTER, *Optimal Control*, Birkhauser, 2010.
- [147] G. VOSSEN, H. MAURER,  $L^1$  minimization in optimal control and applications to robotics, *Optimal Control Applications and Methods* 27, pp. 301–321, 2006.
- [148] G. WACHSMUTH, D. WACHSMUTH, Convergence and regularization results for optimal control problems with sparsity functional, *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.* 17(3), pp. 858–886, 2011.
- [149] R.C. WARD, Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 14, N. 4, pp. 600–610, 1977.
- [150] A. WEIL, L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications, *Actualités scientifiques et industrielles*, Publications de l’Institut de mathématique de l’Université de Strasbourg, 4 Paris, Hermann, pp. 869–1145, 1951.

- [151] C. YATES, R. ERBAN ET AL., Inherent noise can facilitate coherence in collective swarm motion, *Proc. National Academy of Sciences* 106, pp. 5464–5469, 2009.
- [152] A. ZAPPAVIGNA, P. COLANERI, S. KIRKLAND, R. SHORTEN, Essentially negative news about positive systems, *Linear Algebra and its Applications*, Volume 436, Issue 9, pp. 3425–3442, 2012.







